J. QUINET

curso elemental de matemáticas superiores

tomo 3

cálculo integral y primeras aplicaciones

Curso Elemental de Matemáticas Superiores

TOMO III

Cálculo integral y primeras aplicaciones

OBRAS DEL MISMO AUTOR PUBLICADAS POR

PARANINFO

CURSO ELEMENTAL DE MATEMATICAS SUPERIORES

TOMO I

Complementos de álgebra. Las derivadas y sus aplicaciones, con 400 ejercicios y problemas a resolver.

TOMO II

Desarrollos en serie. Cálculo de complejos. Cálculo diferencial, con 700 ejercicios y problemas a resolver.

TOMO III

Cálculo integral y primeras aplicaciones, con 450 ejercicios y problemas a resolver.

TOMO IV

Continuación del cálculo integral y aplicaciones, con 290 ejercicios y problemas a resolver.

Cálculo integral, complementos y aplicaciones.
Cálculo de los momentos de inercia.
Algunas aplicaciones de las integrales.
La serie de *Fourier*, con *ejemplos detallados* de desarrollos.
Integración gráfica y cálculo aproximado de una integral.
Integrales curvilíneas.
Integración de diferenciales totales.
Integrales múltiples. Integrales dobles. Nociones sobre integrales triples.

TOMO V

Ecuaciones diferenciales y aplicaciones, con 300 ejercicios y problemas a resolver.

Ecuaciones de primer y segundo orden, tipos diversos, con numerosos ejemplos.
48 ejemplos de aplicaciones prácticas de las ecuaciones diferenciales a problemas (mecánica, física, electricidad, termodinámica, resistencia de materiales, etc.).
Ecuaciones en derivadas parciales (aplicación a las cuerdas vibrantes y a la propagación de la corriente eléctrica a lo largo de las líneas).
Introducción al estudio del potencial, y al estudio de los campos.

TOMO VI, con 782 ejercicios y problemas a resolver.

Geometría analítica plana.
Estudio de las cónicas y aplicaciones.
Trazado de curvas con numerosos ejemplos detallados.
Algunas aplicaciones físicas de las cónicas.

TEORIA Y PRACTICA DE LOS CIRCUITOS ELECTRONICOS Y DE LOS AMPLIFICADORES

TOMO I

Teoría y aplicaciones del cálculo de complejos al estudio de los circuitos de electrónica.

TOMO II

Los amplificadores HF y BF. Los osciladores y la modulación. Los filtros y los puentes de medida.

TOMO III

Estudio general de la propagación de la corriente HF a lo largo de las líneas y aplicaciones. Antenas. — Ecuaciones de Maxwell y aplicaciones.

SERIE POLITECNICA

Curso Elemental de Matemáticas Superiores

Cálculo diferencial e integral y Geometría analítica plana
con un gran número de ejemplos y aplicaciones

por

J. QUINET

Ingeniero de la Escuela Superior de Electricidad
Profesor de la Escuela Nacional de Radioelectricidad de Clichy
Profesor honorario de Matemáticas generales de la Escuela Central de T.S.H.

Prólogo de

R. BARTHÉLEMY

Miembro de la Academia de Ciencias

TOMO III

Cálculo integral y primeras aplicaciones

De uso para:
Ingenieros, alumnos-ingenieros,
Técnicos diversos, estudiantes

SERIE POLITECNICA

1967

PARANINFO

MADRID

Traducido por
CARLOS SAN ANTONIO MONSELL

© 1965 DUNOD

Depósito Legal: Z. 329.-1966

PARANINFO Meléndez Valdés, 14 y 65 — MADRID (15)

Cometa, S. A. - León XIII, 24 - Zaragoza, 1967

PROLOGO

J. QUINET es un profesor al que aprecio desde hace treinta años. Le hubiera sido muy fácil obtener, para su obra de Matemáticas Superiores, las frases elogiosas de un hombre del arte matemático, y en Francia existen hombres muy notables. Sin embargo, se ha contentado con un «usuario», con un hombre de los que no crean ni juzgan las matemáticas, pero que intentan servirse de ellas.

No estoy, pues, especialmente calificado para presentar la obra de un especialista, y si he aceptado a intervenir, es porque J. QUINET, Profesor de Matemáticas, comenzó siendo un Ingeniero Electricista y continuó siéndolo.

Esto explica la forma atractiva que ha sabido dar a exposiciones consideradas frecuentemente como áridas.

Sin abandonar la línea ni el rigor de la enseñanza clásica, que proporciona las alegrías más puras a aquellos (los hay) que aman las matemáticas, muestra, al mismo tiempo que expone el programa y no al final, para qué sirven las fórmulas del álgebra en la resolución de los problemas de física.

El estudiante, el futuro ingeniero, se da cuenta entonces de la necesidad de esta «herramienta» intelectual, sin la cual, a pesar de sus dotes de intuición o de invención, no lograría franquear ciertos límites rápidamente alcanzados mediante ella.

Comprende QUINET que este prodigioso esfuerzo del pensamiento, realizado desde hace algunos siglos, no es la obra de un aficionado, útil solamente para amueblar el espíritu y pasar los exámenes, sino que es una de las bases fundamentales de su profesión.

La obra de J. QUINET, prevista para un curso de una Escuela de Radioelectricidad, está evidentemente orientada hacia los campos de aplicación eléctrica, y yo siento ahora, al leerla, el no haberla tenido antaño, cuando preparaba solo, en provincias, el examen de la Escuela Superior de Electricidad, cuando extraía los conceptos ma-

temáticos de un enorme tratado de «Especiales», en el cual era completamente incapaz de hacer las selecciones necesarias.

J. QUINET no olvida, sin embargo, la mecánica matemática y construye sólidos cimientos para los que tienen mayores aspiraciones. Los estudios de las series, el desarrollo de FOURIER conducen, en efecto, a las proximidades del cálculo simbólico y no queda mucho camino por recorrer entre las soluciones presentadas para las ecuaciones diferenciales y las ecuaciones de BESSEL.

Intencionadamente hago alusión a aquellas partes que entran ahora en la técnica del ingeniero de circuitos y de ondas centimétricas. Pero no se puede abarcar en un libro encuadrado dentro de las matemáticas elementales toda la estructura de los cálculos de la física moderna. J. QUINET nos conduce a los umbrales de estos campos. Nos da los medios para resolver la mayor parte de los problemas planteados al ingeniero y nos proporciona excelentes trampolines de partida.

Deseo que escriba nuevas obras en las que nos invite a incursiones hacia nuevos horizontes. Todos sus alumnos y amigos le seguirán con interés.

René BARTHÉLEMY,
Miembro de la Academia de Ciencias.

«En el campo de la ciencia, el azar sólo favorece a los espíritus preparados.»

PASTEUR.

PREFACIO

En el tomo I de este Curso hemos dado, en el prefacio, el plan general de esta obra de seis tomos, habiendo precisado cuáles eran las consideraciones que nos habían guiado, así como el espíritu con el que habíamos redactado este Curso.

En este tomo III, primero de los tres consagrados al «*Cálculo Integral*», se hallará el estudio detallado de los procedimientos clásicos de integración (*con numerosos ejemplos explicados con detalle*), así como las primeras aplicaciones del cálculo integral, comprendido el estudio y la utilización de las líneas trigonométricas hiperbólicas.

El Cálculo Integral comprenderá tres tomos y no dos, como se había anunciado primeramente, con el fin de poder exponer un mayor número de aplicaciones. Por ejemplo, al final del tomo IV hay veintitrés aplicaciones de las integrales a problemas de Mecánica, Física, Electricidad, Radio, Resistencia de Materiales, etc., para que el lector vea cómo el Cálculo Integral y Diferencial sirve para la resolución de los problemas prácticos. En el tomo V encontrará treinta y cinco aplicaciones de las ecuaciones diferenciales.

Hemos respondido *de antenamo* a las objeciones de los lectores, estudiantes diversos, alumnos de ingeniería, técnicos e ingenieros diversos, ya que, después de 33 años de dar clase a alumnos de ingeniería, conocemos bien sus deseos y, *sobre todo, sus objeciones.*

Repetimos que nuestro propósito es el de «*enseñar, explicar, hacer comprender y mostrar las aplicaciones*», y por ello hemos dado el detalle de todos los cálculos. Si algunos se irritan ante nuestras explicaciones o por la forma en que se presentan los detalles de los

cálculos, que piensen que los únicos jueces deben ser los lectores, y *nosotros sabemos* que la inmensa mayoría de éstos nos dará la razón. Conocemos suficientemente las quejas de los alumnos para poder responder a ellas.

El cálculo integral continuará en el tomo IV con la búsqueda de los momentos de inercia, con 23 problemas de aplicaciones prácticas de las integrales, la serie de FOURIER (con varios ejemplos *detallados*), integración de las diferenciales totales, integrales curvilíneas, teorema de GREEN, integrades dobles y triples y, finalmente, en el tomo V con las ecuaciones diferenciales de primer y segundo orden, *con muchos ejemplos y gran número de aplicaciones prácticas.*

Estableceremos también, en el capítulo de las ecuaciones de derivadas parciales, la ecuación de las cuerdas vibrantes, la cual integraremos.

— Agradecemos de todo corazón a M. CHAUSSIN, profesor de l'École normale supérieure de l'Enseignement technique, así como a MM. GIROUX y DIEUDÉ, ingenieros, y a M. QUINQUETON, Director adjunto del Institut technique professionnel, su labor de releer, corregir las pruebas y verificar todos los cálculos; les expresamos aquí, de nuevo, nuestro más vivo reconocimiento.

— Es también un agradable deber para nosotros agradecer a la editorial Paraninfo el meticuloso cuidado con que este libro ha sido editado e impreso, lo que hará más fácil y agradable su lectura.

J. QUINET.

INDICE DE MATERIAS

PRIMERA PARTE

LAS INTEGRALES Y SU CALCULO

CAPÍTULO PRIMERO

Definición de una integral

1. Preliminares ... ... *Pág.* 17
2. ¿Qué es una integral? 20
3. ¿Hay reglas para integrar? 24

CAPÍTULO II

Primer procedimiento de integración

4. Integrales fundamentales 27
5. Integración por sustitución 29
6. Integrales que comprenden $\sqrt{K^2 - x^2}$ o $\sqrt{x^2 \pm K^2}$ 35
7. Algunos ejemplos sencillos de determinación de constantes 39

CAPÍTULO III

Integrales definidas

8. Definición y cálculo 45
9. Ejemplos de integrales definidas 46
10. Inversión de los límites 50
11. Fraccionamiento de una integral definida 51
12. Caso en que uno de los límites es infinito 53
13. Caso en que la función $y = f(x)$ se hace infinita entre los límites. 56
14. Algunas integrales ingeniosas 57

CAPÍTULO IV

Ejemplos de aplicaciones prácticas de las integrales

15. Aplicación eléctrica: descarga de un condensador eléctrico a través de una resistencia 59
16. Segunda aplicación eléctrica 66
17. Tercera aplicación eléctrica 67

CAPÍTULO V

Segundo procedimiento de integración. Integración por partes

18. Principio 69
19. Ejemplos 70

CAPÍTULO VI

Integrales que contienen $ax^2 + bx + c$ o bien $\sqrt{ax^2 + bx + c}$

20. Integrales del tipo $\int \frac{dx}{ax^2 + bx + c}$ 81

21. Integrales del tipo $\int \frac{(px + r)dx}{ax^2 + bx + c}$ 84

22. Integrales del tipo $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}$ 86

23. Integrales de la forma $\int \frac{(px + r)dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}$ 88

24. Integrales de la forma $\int \sqrt{ax^2 + bx + c}\, dx$ 88

25. Otro procedimiento para calcular $\int \sqrt{ax^2 + bx + c}\, dx$ o bien $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}$ 91

26. Aplicación eléctrica: cálculo de la capacidad eléctrica de un hilo rectilíneo cargado 94

27. Integrales de la forma $\int \frac{x^m dx}{\sqrt{ax + b}}$ o bien $\int x^m \sqrt{ax + b}\, dx$ ... 96

Capítulo VII

Integración de las fracciones racionales

28. Procedimiento simple y rápido para dividir un polinomio por otro 99
29. Descomposición de un polinolio en producto de factores 103
30. Descomposición de una fracción racional en elementos simples ... 104
31. Primer caso: factores de primer grado no repetidos 105
32. Segundo caso: factores de primer grado repetidos n veces 107
33. Tercer caso: factores de segundo grado no repetidos 109
34. Cuarto caso: factores de segundo grado repetidos n veces 112
35. Otro método para integrar $\int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^m}$ 114

Capítulo VIII

Integración de las expresiones trigonométricas

36. Integrales de la forma $\int f(\text{sen } x, \cos x, \text{tg } x)dx$ 115
37. Segundo caso: Integrales que contienen un producto de dos cosenos, o de dos senos, o de un seno por un coseno 121
38. Tercer caso: Integrales que contienen líneas trigonométricas al cuadrado 121
39. Cuarto caso: Integrales de la forma $\int \text{sen}^m x \cdot \cos^p x\, dx$ 123
40. Caso general de $\int \text{sen}^m x\, dx$ o bien $\int \cos^m x\, dx$ 125
41. Integrales de la forma $\int tg^m x\, dx$ o bien $\int \frac{dx}{tg^m x}$ 128
42. Otras integrales trigonométricas 131

Capítulo IX

Integrales por un desarrollo en serie e integrales diversas

43. Principios y ejemplos 135
44. Integrales de la forma $\int x(a^m + bx^n)^p dx$ 137
45. Integrales diversas *(30 ejemplos)* 139

SEGUNDA PARTE

APLICACIONES DE LAS INTEGRALES

CAPÍTULO X

Valores medios de las funciones

46. Cálculo del valor medio de una función 155
47. Aplicación a una función sinusoidal 157
48. Valor eficaz de una corriente alterna 160

CAPÍTULO XI

Cálculo de las superficies

49. Caso en que la curva está expresada en la forma $y = f(x)$ 163
50. Caso en que la curva se presenta en forma paramétrica 169
51. Caso en que la curva está en coordenadas polares 174
52. Superficie de una curva cerrada 180

CAPÍTULO XII

Líneas trigonométricas hiperbólicas

53. Diferencial de la superficie de un sector en coordenadas cartesianas. Aplicaciones al círculo y a la hipérbola 183
54. Líneas trigonométricas hiperbólicas 189
55. Cálculo de las derivadas de las líneas hiperbólicas 191
56. Fórmulas diversas 191
57. Curvas de ch x, sh x y th x 193
58. Funciones hiperbólicas inversas 195
59. Ejercicios numéricos sobre las líneas hiperbólicas 197
60. Líneas hiperbólicas de una expresión imaginaria 198
61. Aplicación al cálculo de ciertas integrales (4 ejemplos) 200

CAPÍTULO XIII

Longitud de las curvas

62. Cálculo de la longitud de una curva 205
63. Ejemplos 207
64. Longitud y estudio detallado de la catenaria 210
65. Caso en que la curva está dada en forma paramétrica 215
66. Caso en que la curva está en coordenadas polares 216

CAPÍTULO XIV

Cálculo de los volúmenes de revolución

67. Establecimiento de la fórmula: Ejemplos diversos ... 219
68. Volumen engendrado por una superficie plana cerrada que gira alrededor de un eje ... 223

CAPÍTULO XV

Superficie lateral de los volúmenes de revolución

69. Establecimiento de la fórmula ... 227
70. Ejemplos diversos ... 228

CAPÍTULO XVI

Búsqueda de los centros de gravedad

71. Preliminares ... 233
72. Búsqueda de la posición del c. d. g. de una curva ... 234
73. Ejemplos diversos ... 235
74. Centros de gravedad de las superficies ... 240
75. Ejemplos ... 241
76. Centros de gravedad de los volúmenes ... 245
77. Teoremas de GULDIN ... 247
78. Ejemplos ... 251

LISTA RECAPITULATIVA DE LAS FÓRMULAS DEL TOMO III ... 255

450 EJERCICIOS Y PROBLEMAS A RESOLVER ... 265

RESUMEN DEL TOMO IV (CONTINUACIÓN DEL CÁLCULO INTEGRAL) ... 296

PRIMERA PARTE

LAS INTEGRALES Y SU CALCULO

CAPITULO PRIMERO

DEFINICION DE UNA INTEGRAL

1. Preliminares. — El cálculo integral es, en una palabra, la inversa del cálculo diferencial.

El cálculo diferencial tenía dos fines principales, aparte de ciertas aplicaciones geométricas o numéricas:

1.° Calcular la diferencial dy de una función $y = f(x)$, es decir calcular la variación de una función (al menos su parte principal).

2.° Expresar un problema en forma de ecuación por intermedio de las diferenciales.

El cálculo integral tiene, sobre todo, por objeto, aparte de ciertas aplicaciones, resolver un problema y encontrar la función $y = f(x)$ partiendo de la diferencial dy.

No nos perderemos en consideraciones filosófico-matemáticas más o menos complicadas, ya que nuestro fin perseguido es, ante todo, práctico.

En los tomos III y IV, consagrados al Cálculo Integral, y en el V, que se dedicará a las *ecuaciones diferenciales,* nos esforzaremos en presentar al lector el máximo de problemas y aplicaciones prácticas.

— El cálculo de las derivadas y de las diferenciales consiste, como se vio en el primer tomo, en estudiar el crecimiento de una magnitud y en calcular su variación.

— Así, sea la función $y = x^2$,
su diferencial es $dy = 2x\,dx$.

Inversamente, en el cálculo integral, conociendo la diferencial dy de una función, podrá calcularse la función $y = f(x)$ de la que proviene. Esto se llama hallar *le función primitiva* o su *integral.*

Así, partiendo de $2x \cdot dx$, y remontándonos a $y = x^2$, se hace una integración; $y = x^2$ es la función primitiva, lo cual se escribe *simbólicamente* de la forma siguiente:

$$y = \text{función primitiva de } dy =$$

$$= \int dy = \int 2x\, dx = x^2.$$

— Vamos a ver ahora que una función primitiva es una suma, en número infinito, de cantidades infinitamente pequeñas, y comprobaremos por qué es legítimo considerar una función primitiva como la suma de los valores de su diferencial:

$$\int dy = y.$$

Toda magnitud puede, en efecto, ser considerada como formada por una cantidad de pequeñas partes que, cuanto más pequeñas sean, más numerosas serán.

¿Cuál es la utilidad de esto? Pues que, muy a menudo, no hay más remedio que efectuar la suma de estas pequeñas partes.

— Consideremos primeramente un caso simple: sea, por ejemplo, la siguiente progresión geométrica, cuya razón es $\frac{1}{2}$:

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8} \ldots$$

siendo la suma de un número infinito de términos:

$$S = a \cdot \frac{1}{1-r} = 1 \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2.$$

Así, partamos de una longitud inicial de 10 cm y vayamos añadiendo segmentos de 5 cm, 2,5 cm, etc., cada uno de los cuales sea la mitad del precedente. Pues bien, añadiendo un número infinito de segmentos ¡no se tendrá en total más de 20 cm!

— *Se verá que el cálculo integral permite alcanzar el total exacto resultante de un número infinito de sumas.*

Ejemplo geométrico. — *Partiendo de una derivada o de una diferencial, hallar la función de donde proviene.*

Sea $y' = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{5}x$ de donde $dy = \frac{1}{5}x\,dx$.

Cuando $x = 0$ $y' = 0$, la pendiente de la curva es nula.

Cuando $x = 1$ $y' = \frac{1}{5}$.

Cuando $x = 2$ $y' = \frac{2}{5}$, etc.

Se puede, pues, para cada valor de x, conocer la pendiente de la curva y trazar ésta bajo forma de línea quebrada, colocando uno tras otro los triángulos indicados en la figura (1), cada uno de ellos

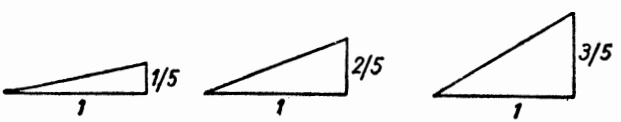


FIG. 1

con el centro de su base a la distancia x considerada (fig. 2). Para obtener una curva exacta sería preciso tomar intervalos cada vez más pequeños. Para un incremento dx cualquiera, y fijo, la variación dy es siempre la quinta parte de $x \cdot dx$.

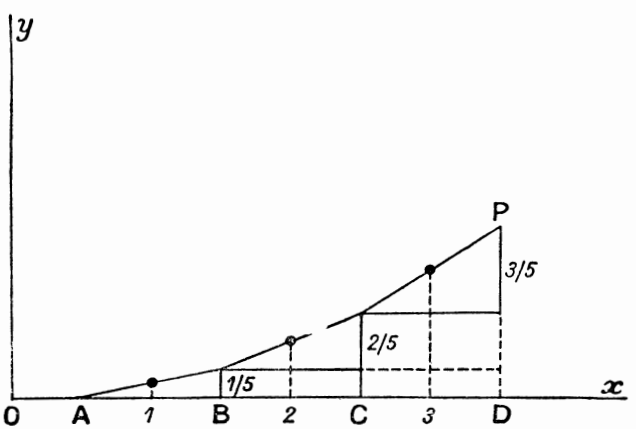


FIG. 2

— Calculemos entonces y.

En un punto P cualquiera, *el valor de y es la suma de todos los dy* precedentes:

$$y = \sum dy,$$

que se pronuncia «Sigma de *dy*», y donde cada dy vale $\frac{1}{5}\, x\, dx$, luego

$$y = \sum \frac{1}{5} x\, dx,$$

y, si se toma dx infinitamente pequeños, se tendrá un número infinitamente grande de estas cantidades.

¿Cuál es, pues, la función y cuya derivada es $\frac{1}{5}x$?

Es

$$y = \frac{x^2}{10}, \qquad \left(\text{en efecto } y' = \frac{x}{5}\right)$$

y se dirá que $\frac{x^2}{10}$ es la función primitiva de $\frac{1}{5}x\, dx$. Se ha hecho así una integración.

— *La integración es, pues, el arte de encontrar una función y partiendo de su diferencial dy.*

Podremos ahora generalizar considerando la diferencial de una superficie.

2. ¿Qué es una integral? — *Una integral tiene dos significados fundamentales: en primer lugar es una función primitiva; en segundo lugar es una suma de cantidades infinitamente pequeñas en número infinitamente grande.*

Esto se comprenderá mejor por intermedio de una superficie de curva.

a) **Una integral es una función primitiva.** — Calculemos la diferencial *dS de la superficie* S comprendida entre una curva $y = f(x$ y el eje de las x, desde $x = 0$ hasta una cierta abscisa x (fig. 3).

Sea un punto M de abscisa x y de ordenada y. Llamemos S a la superficie OAMB, y ΔS al aumento de la superficie S cuando x varía en Δx (o sea, la superficie rayada).

ΔS es mayor que el pequeño rectángulo de base Δx y de altura y, y menor que el rectángulo grande de altura $y + \Delta y$:

$$y \cdot \Delta x < \Delta S < (y + \Delta y)\Delta x,$$

que se puede escribir:

$$y < \frac{\Delta S}{\Delta x} < y + \Delta y.$$

Si $\Delta x \to 0$, asimismo tienden a cero Δy y ΔS, y, en el límite, $\frac{\Delta S}{\Delta x}$ viene a valer S_x' Por otra parte, $\frac{\Delta S}{\Delta x}$ está comprendido entre dos cantidades, una fija y y otra $y + \Delta y$ que vale y en el límite, luego $\frac{\Delta S}{\Delta x}$ valdrá también y en el límite:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta x} = S_x' = y = f(x)$$

es decir, reemplazando la derivada S' por $\frac{dS}{dx}$:

$$\frac{dS}{dx} = y \qquad \text{de donde} \qquad dS = y\,dx.$$

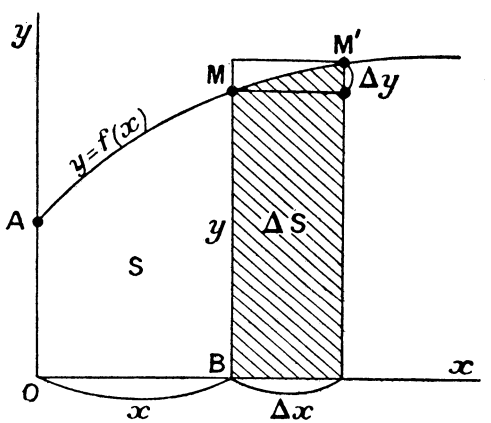


FIG. 3

Así, la superficie S tiene una diferencial dS igual a $y \cdot dx$ ($y \cdot dx$ es, por otra parte, la superficie del rectángulo de base dx y de altura y; es la parte principal de ΔS).

— Resulta de esto que la superficie S es la función primitiva de dS, es decir de $y \cdot dx$:

$$S = \text{función primitiva de } y \cdot dx$$

que se escribe *simbólicamente* de la forma siguiente:

$$\boxed{S = \int y \cdot dx = \int f(x) \cdot dx}$$

y que se pronuncia: «S igual a *Integral de* $y \cdot dx$» o bien «Integral de $f(x)dx$».

b) **Una integral es una suma de cantidades infinitamente pequeñas en número infinitamente grande.** — Acabamos de ver que la superficie S comprendida entre una curva y el eje de las x es la función primitiva de $y \cdot dx$, donde $y = f(x)$ es la ecuación de la curva. Así, conociendo la ecuación de la curva, se podrá calcular la superficie S.

— Interpretemos esto de otra forma (fig. 4):

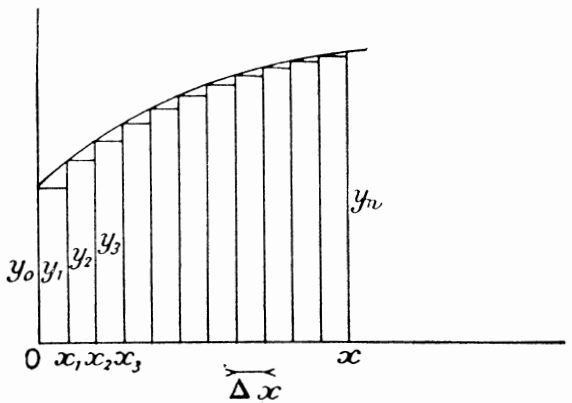


FIG. 4

Volvamos a tomar nuestra curva $y = f(x)$ y, en ella, una abscisa x cualquiera. Dividamos esta abscisa en n partes iguales a Δx. Representemos las diferentes ordenadas correspondientes, es decir, y_0, y_1, y_2, y_3... y tracemos los escalones de alturas variables repre-

sentados en la figura 4. Esto determina rectángulos cuyas superficies son

$$y_0 \cdot \Delta x, \quad y_1 \cdot \Delta x, \quad y_2 \cdot \Delta x, \quad y_3 \cdot \Delta x, \ldots \text{ etc.}$$

La suma de todas estas superficies *no es* la superficie *S* comprendida entre la curva y el eje de las *x*, y, para tener la superficie exacta, es preciso que Δx tienda hacia cero, es decir, que el número de estos rectángulos tienda a infinito

$$S = \sum_{n=\infty} \text{de } (y \cdot \Delta x).$$

Así, la superficie S será una suma, en número infinitamente grande, de cantidades *infinitamente pequeñas* $y \cdot dx$, lo que se escribe *simbólicamente*

$$\boxed{S = \int y \cdot dx}$$

lo cual es, en efecto, una suma en la que y toma todos los valores dados por la ecuación de la curva, y que se pronuncia: «S *igual a integral de* $y \cdot dx$». El signo $\int$ tiene cierto parecido con la letra S.

Comparando así esta expresión de S con la encontrada anteriormente, se ve que *una función primitiva no es más que una suma infinita de cantidades infinitamente pequeñas, o diferenciales,* y que esta suma es una función primitiva.

Nota importante. — En realidad, una diferencial tiene una infinidad de funciones primitivas, difiriendo unas de otras por constantes, puesto que la diferencial de una constante es nula. Por eso se dice que se calcula una integral *indefinida,* debiéndose escribir en realidad, llamando I a la integral

$$I = \int y \cdot dx + C$$

Así las expresiones $x^2 + 10$, o $x^2 - 1$, o $x^2 + 1.000$ etc... tienen todas $2x \cdot dx$ como diferencial; por eso, partiendo de $dy = 2x \cdot dx$, se escribirá la integral

$$I = \int 2x\, dx + C = x^2 + C.$$

La constante es indeterminada. *Más adelante veremos cómo, en cada caso particular, se determina el valor de esta constante* C.

Toda función continua tiene una derivada. Inversamente, toda función continua tiene una integral, pero la demostración rigurosa de esto no encuentra lugar aquí.

3. ¿Hay reglas para integrar? — En el cálculo diferencial (ver el Tomo II) se ha dado las reglas para diferenciar, mientras que en el cálculo integral no hay método general para integrar; solamente hay un cierto número de procedimientos particulares, aplicándose uno u otro según el tipo de integral. La integración es, pues, un método de ensayos, de ensayos variados, que piden una parte activa, dinámica, del operador. A menudo se verán transformaciones... extraordinarias y astucias (!) admirables, que dan tan gran atractivo a esta parte de las matemáticas.

Para hacernos comprender bien, diremos (y pedimos al lector que nos perdone esta comparación) que el cálculo integral es al cálculo diferencial ¡como... el juego de ajedrez es al juego de damas!

En la página 28 damos una tabla de integrales fundamentales, típicas, a las que se deberá intentar referirse en cada caso particular. Por esto, se ha consagrado un gran número de páginas a los principales procedimientos de integración.

Veremos a continuación las aplicaciones del cálculo integral.

— Se recurrirá en cada instante a los dos teoremas siguientes.

Teorema I. — *Se puede sacar un factor constante del signo de integración, o introducirle en el signo «integral» sin que nada cambie.*

Sea, por ejemplo, la expresión $\int C \cdot dx$, donde C es un factor constante (no conteniendo, por lo tanto, a x).

Ahora bien, el producto $C \cdot dx$ puede escribirse $C \cdot dx =$ diferencial del producto $C \cdot x = d\,(C \cdot x)$.

Se tendrá pues:

$$\int C \cdot dx = \int d(C \cdot x).$$

Pero la suma de todas las dy es igual a y (ya se dijo anteriormente), y la suma de todos los dx es igual a x, luego

$$\int d(C \cdot x) = C \cdot x$$

neutralizándose en cierto modo el signo $\int$ delante del signo d, y se podrá escribir

$$\int C \cdot dx = C \cdot x \qquad \text{o bien} \qquad C \int dx.$$

Se ve así que el factor constante C *ha salido del signo* $\int$.

— Se tendrá, por ejemplo

$$\int 5\,dx = 5\int dx = 5x$$

$$\int \frac{1}{m} y\,dx = \frac{1}{m}\int y\,dx \qquad \text{etc.}$$

Inversamente, para ciertas necesidades que veremos seguidamente, se podrá escribir, por ejemplo:

$$\int y\,dx = -\frac{1}{2}\int -2y\,dx \qquad \text{etc.}$$

Todo esto se comprenderá mejor a continuación en el cálculo de las integrales.

Teorema II. — *La integral de una suma (o de una diferencia) es igual a la suma (o a la diferencia) de las integrales parciales.*

— *Calcular*

$$\int (du + dv + dz).$$

Ahora bien, se puede escribir, puesto que la diferencial de una suma es igual a la suma de las diferenciales de cada término:

$$du + dv + dz = d(u + v + z).$$

Se tendrá pues:

$$\int (du + dv + dz) = \int d(u + v + z)$$

$$= u + v + z.$$

Pero $u + v + z$ puede escribirse, como anteriormente se dijo:

$$u + v + z = \int du + \int dv + \int dz.$$

lo que da finalmente

$$\int (du + dv + dz) = \int du + \int dv + \int dz$$

Es decir que la integral de una suma es igual a la suma de las integrales de cada término.

NOTA. — No se puede generalizar este teorema: la integral de un producto (o de un cociente) no es igual al producto (o al cociente) de las integrales de cada factor.

CAPITULO II

PROCEDIMIENTOS DE INTEGRACION

4. Integrales fundamentales. — Cualesquiera que sean los procedimientos utilizados para calcular una integral, *se deberá siempre llegar a una integral fundamental.* Antes de dar la tabla de las integrales fundamentales, veremos el modo de encontrarlas:

la diferencial de $\operatorname{sen} x = \cos x\, dx$, luego la integral de $\cos x \cdot dx$ es $\operatorname{sen} x$:

$$\int \cos x\, dx = \operatorname{sen} x + C,$$

la diferencial de $\cos x = -\operatorname{sen} x\, dx$, luego la integral de $\operatorname{sen} x\, dx$ es $-\cos x$:

$$\int \operatorname{sen} x\, dx = -\cos x + C.$$

la diferencial (1) de $\operatorname{Log} x = \dfrac{1}{x}\, dx$, de donde $\displaystyle\int \frac{dx}{x} = \operatorname{Log} x + C,$

la diferencial de $\operatorname{arc\,tg} x = \dfrac{dx}{1+x^2}$, de donde $\displaystyle\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arc\,tg} + C,$

la diferencial de $\sqrt{x} = \dfrac{dx}{\sqrt{x}}$, de donde $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C,$

la diferencial de $x^2 = 2x\, dx$, de donde $\displaystyle\int x\, dx = \frac{x^2}{2} + C,$

la diferencial de $x^3 = 3x^2\, dx$, de donde $\displaystyle\int x^2\, dx = \frac{x^3}{3} + C,$

la diferencial de $x^m = mx^{m-1}\, dx$, donde $\displaystyle\int x^m\, dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} + C.$

siendo esta última aplicable a *cualquier valor de m*: positivo, negativo, entero o fraccionario, excepto para $m = -1$. En efecto, si $m = -1$.

$$\int x^{-1}\, dx = \int \frac{dx}{x} = \operatorname{Log} x.$$

(1) En esta obra, Log es el símbolo que se utiliza para representar el logaritmo neperiano, log para representar el logaritmo decimal. Una normalización reciente ha designado los símbolos:

ln para logaritmo neperiano
lg para logaritmo decimal
lb para logaritmo binario (base 2)
$\log_a$ para logaritmo de base a

Tabla de las integrales fundamentales

(apréndase de memoria)

Integrales:	Resultados:
$\int \cos x\, dx$	$\operatorname{sen} x + C$
$\int \operatorname{sen} x\, dx$	$-\cos x + C$
$\int \frac{dx}{x}$	$\operatorname{Log} x + C$
$\int e^x\, dx$	$e^x + C$
$\int \frac{dx}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x} + C$
$\int a^x\, dx$	$\frac{a^x}{\operatorname{Log} a} + C$
$\int x^m\, dx$	$\frac{x^{m+1}}{m+1} + C$ (cualquiera que sea m, salvo para $m = -1$,)
$\int \frac{dx}{\cos^2 x}$	$\operatorname{tg} x + C$
$\int \frac{dx}{x^2}$	$-\frac{1}{x} + C$
$\int \frac{dx}{1+x^2}$	$\operatorname{arc\,tg} x + C$
$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$	$\operatorname{arc\,sen} x + C$
$\int \frac{-dx}{\sqrt{1-x^2}}$	$\operatorname{arc\,cos} x + C$
$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}$	$\operatorname{Log}(x + \sqrt{x^2+1}) + C$
$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}$	$\operatorname{Log}(x + \sqrt{x^2-1}) + C$

Así, por ejemplo:

$$\int x^{-4}\,dx = \frac{x^{-4+1}}{-4+1} = \frac{x^{-3}}{-3} = -\frac{1}{3x^3},$$

en efecto, la diferencial de

$$-\frac{1}{3x^3}\ (\text{ó}\ -\frac{1}{3}x^{-3}) \quad \text{es} \quad x^{-4}\,dx.$$

— Se puede, pues, establecer la tabla anteriormente escrita, la cual es imprescindible aprender de memoria. Pero, si el lector conoce *perfectamente a fondo* las derivadas, sabrá automáticamente las integrales. ¡*Pero cuidado con confundirse*!

Nota: hemos incluido en esta tabla las dos últimas integrales, las cuales son de uso *frecuente* y pesadas de calcular. El lector verificará fácilmente que, diferenciando el término de la columna de la derecha, se encuentra el de la columna de la izquierda.

— Hay varios procedimientos de integración, dependiendo de la forma y del tipo de integral. No estudiaremos aquí más que los procedimientos clásicos de integraciones, los más útiles e importantes, comenzando, evidentemente, por el más sencillo, *aquél por el cual debe siempre comenzarse* para calcular una integral; si éste no resulta, se ensaya otro:

1.° Integración por sustitución;
2.° Integración por partes;
3.° Integración de fracciones con un trinomio en el denominador:
4.° Integración de expresiones que contienen raíces cuadradas;
5.° Integración de las fracciones racionales;
6.° Integración de las expresiones trigonométricas;
7.° Integración por desarrollos en serie.

PRIMER PROCEDIMIENTO DE INTEGRACION
INTEGRACION POR SUSTITUCION

5. Principio. — *Se divide la integral en dos partes, llamando u a una parte de la integral a calcular, y se calcula du. Pero todo el mérito del operador radica justamente en la conveniente elección de lo que debe llamarse u, de forma que, calculando du, se encuentre la*

otra parte de la integral, ya sea exactamente, ya difiriendo en un coeficiente o en el signo (todo ello se hace con el fin de llegar a una integral fundamental).

El lector va a comprender inmediatamente este sencillo método gracias a los ejemplos siguientes:

Ejemplos:

1.° *Calcular*

$$I = \int \cos 3x \, dx.$$

Esto se asemeja a $\cos u \cdot du$, pero dx no es la diferencial de $3x$, luego pondremos

$$3x = u \quad \text{de donde} \quad 3dx = du \quad \text{y} \quad dx = \frac{du}{3}.$$

La integral queda

$$\int \cos u \cdot \frac{du}{3} = \frac{1}{3} \int \cos u \cdot du = \frac{1}{3} \operatorname{sen} u = \frac{1}{3} \operatorname{sen} 3x + C.$$

2.° *Calcular*

$$I = \int e^{-2x} \, dx.$$

Esto se asemeja a $e^u \cdot du$, pero como dx no es la diferencial de $-2x$, pondremos

$$-2x = u \quad \text{de donde} \quad -2dx = du \quad \text{y} \quad dx = -\frac{du}{2}.$$

La integral queda

$$\int e^u \left(-\frac{du}{2}\right) = -\frac{1}{2} \int e^u du = -\frac{1}{2} e^u = -\frac{1}{2} e^{-2x} + C.$$

3.° *Calcular*

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt{1-4x}}.$$

Expresión es de la forma $\dfrac{du}{\sqrt{u}}$, pero dx no es la diferencial de la cantidad subradical, luego pondremos:

$$1-4x = u \quad \text{de donde} \quad -4dx = du \quad \text{y} \quad dx = -\frac{du}{4}.$$

La integral queda

$$\int \frac{-\frac{du}{4}}{\sqrt{u}} = -\frac{1}{4}\int \frac{du}{\sqrt{u}} = -\frac{1}{4}\cdot 2\sqrt{u} = -\frac{1}{2}\sqrt{1-4x} + C$$

4.° *Calcular*

$$I = \int \frac{dx}{5x-2}.$$

Es de la forma $\frac{du}{u}$, pero dx no es la diferencial de $5x-2$, por lo que ponemos:

$$5x-2 = u \quad \text{de donde} \quad 5dx = du \quad \text{y} \quad dx = \frac{du}{5}.$$

La integral queda

$$\int \frac{\frac{du}{5}}{u} = \frac{1}{5}\int \frac{du}{u} = \frac{1}{5}\operatorname{Log} u = \frac{1}{5}\operatorname{Log}(5x-2)$$

que se puede poner

$$= \operatorname{Log}(5x-2)^{1/5} = \operatorname{Log}\sqrt[5]{x-2} + C.$$

5.° *Calcular*

$$I = \int (3x^2+4)^3 x\,dx.$$

siendo $x\,dx$ la diferencial de x^2, esta integral es de la forma $u^3\,du$. Pero como $x\,dx$ no es la diferencial de $3x^2+4$, pondremos

$$3x^2+4 = u \quad \text{de donde} \quad 6x\,dx = du \quad \text{y} \quad x\,dx = \frac{du}{6}.$$

La integral queda

$$\int u^3 \cdot \frac{du}{6} = \frac{1}{6}\int u^3 du = \frac{1}{6}\cdot\frac{u^{3+1}}{3+1} = \frac{1}{6}\cdot\frac{u^4}{4} = \frac{1}{24}(3x^2+4)^4 + C.$$

6.° *Calcular*

$$I = \int \frac{dx}{5+3x^2}$$

Se asemeja a un *arc tg*, y, para que aún se parezca más, dividamos numerador y denominador por 5:

$$\int \frac{dx}{1+\frac{3x^2}{5}} = \frac{1}{5}\int \frac{dx}{1+\frac{3x^2}{5}}$$

No siendo esta integral por completo de la forma $\frac{du}{1+u^2}$, pongamos

$$\frac{3x^2}{5} = u^2 \quad \text{o} \quad x\sqrt{\frac{3}{5}} = u \quad \text{de donde} \quad dx\sqrt{\frac{3}{5}} = du \quad \text{y} \quad dx = \sqrt{\frac{5}{3}}\,du.$$

La integral queda

$$\frac{1}{5}\int \frac{\sqrt{\frac{5}{3}}\,du}{1+u^2} = \frac{1}{\sqrt{15}}\int \frac{du}{1+u^2} = \frac{1}{\sqrt{15}}\operatorname{arc\,tg} u = \frac{1}{\sqrt{15}}\operatorname{arc\,tg} x\sqrt{\frac{3}{5}} + C$$

7.° *Calcular*

$$I = \int \frac{3x\,dx}{\sqrt{1-4x^2}}$$

No es un *arc sen*, por estar $x\,dx$ en el numerador. Pero $3x\,dx$ es *aproximadamente* la diferencial de la cantidad subradical, y esta integral es de la forma $\frac{du}{\sqrt{u}}$. Pongamos pues

$$1-4x^2 = u \quad \text{de donde} \quad -8x\,dx = du \quad \text{y} \quad x\,dx = -\frac{du}{8}.$$

La integral queda

$$3\int \frac{-\frac{du}{8}}{\sqrt{u}} = -\frac{3}{8}\int \frac{du}{\sqrt{u}} = -\frac{3}{8}\cdot 2\sqrt{u} = -\frac{3}{4}\sqrt{1-4x^2} + C.$$

8.° *Calcular*

$$I = \int \frac{3dx}{\sqrt{1-4x^2}}$$

Se asemeja a un *arc sen*, de la forma $\frac{du}{\sqrt{1-u^2}}$. Pongamos pues

$$4x^2 = u^2 \quad \text{ó} \quad 2x = u \quad \text{de donde} \quad 2dx = du \quad \text{y} \quad dx = \frac{du}{2}.$$

La integral queda

$$3\int \frac{\frac{du}{2}}{\sqrt{1-u^2}} = \frac{3}{2}\int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \frac{3}{2}\operatorname{arc\,sen} u = \frac{3}{2}\operatorname{arc\,sen} 2x + C.$$

9.° *Calcular*

$$I = \int \cos^4 x \cdot \operatorname{sen} x\, dx.$$

Como $\operatorname{sen} x \cdot dx$ es la diferencial de un cos, la cantidad subintegral es de la forma u^4du, por lo que pondremos

$\cos x = u$ de donde $-\operatorname{sen} x\, dx = du$ y $\operatorname{sen} x\, dx = -du$.

La integral queda

$$\int u^4(-du) = -\int u^4du = -\frac{u^5}{5} = -\frac{1}{5}\cos^5 x + C$$

10. *Calcular*

$$I = \int \frac{dx}{\operatorname{sen} x}$$

Esta integral trigonométrica se integrará más adelante por el procedimiento normal, pero también podemos hacerlo ahora gracias a una curiosa transformación, lo que mostrará al lector algunas de estas numerosas transformaciones que se utiliza en el cálculo integral, y que exigen por parte del mismo una atención activa, un espíritu dinámico (!) e imaginación; *esto se adquiere con la práctica de los cálculos y con la experiencia.*

Se sabe que

$$\operatorname{sen} x = 2\operatorname{sen}\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2},$$

se tendrá pues

$$I = \int \frac{dx}{2\operatorname{sen}\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}}.$$

Dividamos el numerador y el denominador por $\cos^2\frac{x}{2}$:

$$I = \int \frac{\dfrac{dx}{\cos^2\frac{x}{2}}}{\dfrac{2\operatorname{sen}\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}},$$

pero como dx no es la diferencial del ángulo $\frac{}{2}$, multipliquemos por 2 y dividamos por 2 la dx del numerador:

$$2\int \frac{\dfrac{\frac{dx}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}}{\dfrac{2\operatorname{sen}\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}} = \int \frac{\dfrac{\frac{dx}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}.$$

Se ve así que el numerador es exactamente la diferencial del denominador; en efecto, pongamos

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = u \qquad \text{de donde} \qquad du = \frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}} \cdot \frac{dx}{2},$$

y se tendrá

$$I = \int \frac{du}{u} = \operatorname{Log} u = \operatorname{Log}\operatorname{tg}\frac{x}{2} + C.$$

Si hubiera de calcularse $\int \frac{dx}{\cos x}$; se escribiría

$$\int \frac{dx}{\cos x} = \int \frac{dx}{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)} = \int \frac{-dz}{\operatorname{sen} z} = -\operatorname{Log}\operatorname{tg}\frac{z}{2} = -\operatorname{Log}\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right) + C.$$

Otro procedimiento para calcular $\int \frac{dx}{\cos x}$.

Multipliquemos el numerador y el denominador por $\frac{1}{\cos x} + \operatorname{tg} x$:

$$\int \frac{\left(\frac{1}{\cos x} + \operatorname{tg} x\right) dx}{\cos x \left(\frac{1}{\cos x} + \operatorname{tg} x\right)} = \int \frac{\left(\frac{1}{\cos^2 x} + \frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x}\right)}{\operatorname{tg} x + \frac{1}{\cos x}} dx,$$

y pongamos

$$\operatorname{tg} x + \frac{1}{\cos x} = u \qquad \text{de donde} \qquad du = \left(\frac{1}{\cos^2 x} + \frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x}\right) dx.$$

La integral queda

$$\int \frac{du}{u} = \operatorname{Log} u = \operatorname{Log}\left(\operatorname{tg} x + \frac{1}{\cos x}\right) + C.$$

6. Integrales que comprenden $\sqrt{K^2 - x^2}$ o $\sqrt{x^2 \pm K^2}$ en el numerador o en el denominador. — Se hacen sustituciones trigonométricas. Más adelante veremos, sin embargo, otros procedimientos.

Hay tres casos, según que se tenga:

$$\sqrt{K^2 - x^2} \quad \text{o bien} \quad \sqrt{x^2 + K^2} \quad \text{o} \quad \sqrt{x^2 - K^2}.$$

1er caso. —*La integral contiene* $\sqrt{K^2 - x^2}$.

Hacemos $x = K \operatorname{sen} \varphi$, de donde $dx = K \cos \varphi \, d\varphi$, la integral se simplifica, obteniéndose una integral trigonométrica, algunas de las cuales podemos ya calcular.

Ejemplos: 1.° Sea calcular $I = \int \frac{dx}{\sqrt{4 - x^2}}$

Pongamos

$$x = 2 \cdot \operatorname{sen} \varphi \qquad \text{de donde} \qquad dx = 2 \cos \varphi \, d\varphi.$$

Teniéndose

$$I = \int \frac{2 \cos \varphi \, d\varphi}{\sqrt{4 - 4 \operatorname{sen}^2 \varphi}} = \int \frac{2 \cos \varphi \, d\varphi}{\sqrt{4(1 - \operatorname{sen}^2 \varphi)}} = \int \frac{\cos \varphi \, d\varphi}{\cos \varphi} =$$

$$= \int d\varphi = \varphi = \operatorname{arc\,sen} \frac{x}{2} + C.$$

2.° *Calcular*

$$I = \int \sqrt{5 - 3x^2}\, dx.$$

Pongamos $3x^2 = 5 \operatorname{sen}^2 \varphi$ (a fin de poder sacar el 5 del radical), de donde

$$x\sqrt{3} = \sqrt{5} \operatorname{sen} \varphi \qquad \text{y} \qquad dx\sqrt{3} = \sqrt{5} \cos \varphi\, d\varphi.$$

Se obtiene

$$I = \int \sqrt{5 - 5 \operatorname{sen}^2 \varphi} \cdot \sqrt{\frac{5}{3}} \cos \varphi\, d\varphi = \frac{5}{\sqrt{3}} \int \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 \varphi} \cdot \cos \varphi\, d\varphi$$

$$= \frac{5}{\sqrt{3}} \int \cos^2 \varphi\, d\varphi \frac{5}{\sqrt{3}} \int \left(\frac{1 + \cos 2\varphi}{2}\right) d\varphi$$

$$= \frac{5}{\sqrt{3}} \left[\frac{1}{2} \int d\varphi + \frac{1}{4} \int \cos 2\varphi \cdot 2d\varphi\right]$$

$$= \frac{5}{\sqrt{3}} \left[\frac{\varphi}{2} + \frac{1}{4} \operatorname{sen} 2\varphi\right] = \frac{5}{\sqrt{3}} \left[\frac{1}{2} \operatorname{arc\,sen} x\sqrt{\frac{3}{5}} + \frac{1}{4} \cdot 2 \operatorname{sen} \varphi \cdot \cos \varphi\right]$$

pero

$$\cos \varphi = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 \varphi} = \sqrt{1 - \frac{3x^2}{5}}$$

lo que da

$$I = \frac{5}{\sqrt{3}} \left[\frac{1}{2} \operatorname{arc\,sen} x\sqrt{\frac{3}{5}} + \frac{1}{2} \cdot x\sqrt{\frac{3}{5}} \cdot \sqrt{1 - \frac{3x^2}{5}}\right]$$

$$= \frac{5}{2\sqrt{3}} \left[\operatorname{arc\,sen} x\sqrt{\frac{3}{5}} + \frac{x\sqrt{3}\sqrt{5 - 3x^2}}{5}\right] + C.$$

2.° caso. — *La integral contiene* $\sqrt{x^2 + K^2}$.

Como esta expresión es análoga a $\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi}$, pongamos:

$$x = K \cdot \operatorname{tg} \varphi \qquad \text{de donde} \qquad dx = K \cdot \frac{d\varphi}{\cos^2 \varphi}.$$

Se simplifica y se obtiene una integral trigonométrica.

Ejemplo: 1.° *Calcular* $I = \int \frac{dx}{\sqrt{4 + x^2}}$.

Hagamos

$$x = 2 \operatorname{tg} \varphi \qquad \text{de donde} \qquad dx = \frac{2d\varphi}{\cos^2 \varphi}.$$

Obteniéndose

$$\int \frac{\frac{2d\varphi}{\cos^2 \varphi}}{\sqrt{4 + 4 \operatorname{tg}^2 \varphi}} = \int \frac{\cos \varphi \, d\varphi}{\cos^2 \varphi} = \int \frac{d\varphi}{\cos \varphi},$$

que anteriormente hemos integrado mediante un artificio, pero que después se integrará por el procedimiento normal.

Tendremos pues:

$$I = \operatorname{Log}\left(\operatorname{tg} \varphi + \frac{1}{\cos \varphi}\right)$$

pero

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{x}{2} \qquad \text{y} \qquad \cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi}} = \frac{2}{\sqrt{4 + x^2}},$$

de donde

$$I = \operatorname{Log}\left(\frac{x}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{4 + x^2}\right) + C$$

$$= \operatorname{Log}\left(\frac{x + \sqrt{4 + x^2}}{2}\right) + C = \operatorname{Log}(x + \sqrt{4 + x^2}) - \operatorname{Log} 2 + C$$

y siendo Log 2 una constante que se añade a C, se tendrá, finalmente

$$I = \operatorname{Log}(x + \sqrt{4 + x^2}) + C'.$$

2.° *Calcular*

$$I = \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^{3/2}}.$$

Hagamos

$$x = a \cdot \operatorname{tg} \varphi \qquad \text{de donde} \qquad dx = a(1 + \operatorname{tg}^2 \varphi)d\varphi.$$

Luego se obtiene

$$I = \int \frac{a(1 + \operatorname{tg}^2 \varphi)d\varphi}{\sqrt{(a^2 \operatorname{tg}^2 \varphi + a^2)^3}} = \frac{1}{a^2} \int \frac{(1 + \operatorname{tg}^2 \varphi)d\varphi}{(1 + \operatorname{tg}^2 \varphi)^{3/2}}$$

$$= \frac{1}{a^2} \int \frac{d\varphi}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi}} = \frac{1}{a^2} \int \cos \varphi \, d\varphi = \frac{1}{a^2} \cdot \operatorname{sen} \varphi$$

$$= \frac{1}{a^2} \cdot \frac{\operatorname{tg} \varphi}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi}} = \frac{1}{a^2} \frac{\frac{x}{a}}{\sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2}}}$$

$$= \frac{x}{a^2 \sqrt{x^2 + a^2}} + C.$$

3er caso. — *La integral contiene* $\sqrt{x^2 - K^2}$.

Se pone $x = \dfrac{K}{\cos \varphi}$, se calcula dx, se simplifica y se obtiene una integral trigonométrica, a menudo fácil de calcular.

Ejemplo: 1.° *Calcular* $I = \int x^4 \sqrt{x^2 - a^2}\, dx$.

Hagamos

$$x = \frac{a}{\cos \varphi} \quad \text{de donde} \quad dx = \frac{a \operatorname{sen} \varphi \, d\varphi}{\cos^2 \varphi}.$$

Luego queda

$$I = \int \frac{a^3}{\cos^3 \varphi} \sqrt{\frac{a^2}{\cos^2 \varphi} - a^2} \cdot \frac{a \operatorname{sen} \varphi \, d\varphi}{\cos^2 \varphi} = a^5 \int \frac{1}{\cos^3 \varphi} \cdot \operatorname{tg} \varphi \cdot \frac{\operatorname{sen} \varphi \, d\varphi}{\cos^2 \varphi}$$

$$= a^5 \int \operatorname{tg}^2 \varphi \cdot \frac{d\varphi}{\cos^4 \varphi} = a^5 \int \operatorname{tg}^2 \varphi (1 + \operatorname{tg}^2 \varphi)^2 \, d\varphi$$

$$= a^5 \int \operatorname{tg}^2 \varphi (1 + \operatorname{tg}^2 \varphi) \cdot (1 + \operatorname{tg}^2 \varphi) d\varphi = a^5 \int (\operatorname{tg}^2 \varphi + \operatorname{tg}^4 \varphi) \cdot (1 + \operatorname{tg}^2 \varphi) d\varphi$$

hagamos ahora

$$\operatorname{tg} \varphi = u \quad \text{de donde} \quad du = (1 + \operatorname{tg}^2 \varphi) d\varphi,$$

y

$$I = a^5 \int (u^2 + u^4)du = a^5 \left[\frac{u^3}{3} + \frac{u^5}{5}\right]$$

$$= a^5\left[\frac{1}{3}\operatorname{tg}^3\varphi + \frac{1}{5}\operatorname{tg}^5\varphi\right] = a^5 \operatorname{tg}^3\varphi \left[\frac{1}{3} + \frac{1}{5}\operatorname{tg}^2\varphi\right],$$

pero,

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\operatorname{sen}\varphi}{\cos\varphi} = \frac{\sqrt{1 - \frac{a^2}{x^2}}}{\frac{a}{x}} = \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{a}$$

de donde

$$I = a^5 \left(\frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{a}\right)^3 \left[\frac{1}{3} + \frac{1}{5}\frac{(x^2 - a^2)}{a^2}\right] = \frac{1}{15}\left(\sqrt{x^2 - a^2}\right)^3 \cdot (2a^2 + 3x^2) + C.$$

7. Algunos ejemplos sencillos de determinación de constantes. — Vamos a ver cómo se puede, en el caso de integrales indefinidas, determinar la constante de integración en cada caso particular.

Recordamos al lector que hemos demostrado al principio de este Tomo III que una integral $\int y \cdot dx$ representa la superficie comprendida entre la curva cuya ecuación es $y = f(x)$, el eje de las x y dos ordenadas cualesquiera.

1.er Ejemplo. — *Sea la curva* $y = \frac{1}{x}$ (fig. 5), *que es una rama de hipérbola. Calcular la superficie comprendida entre la curva y el eje de las x.*

1.° *Desde* $x = 1$ *hasta* $x = 2$;

2.° *Desde* $x = 1$ *hasta* $x = \infty$.

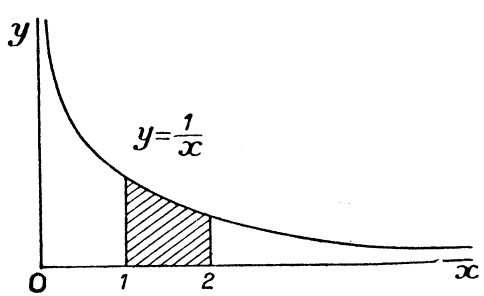


FIG. 5

— Se tiene

$$S = \int y\,dx = \int \frac{1}{x}\,dx = \text{Log}\,x + C.$$

Para determinar la constante C nos situaremos en los límites, pues en general se sabe lo que en ellos ocurre: aquí, para $x = 1$, $S = 0$. Se tendrá, pues, aplicando estos valores a la fórmula general dada:

$$0 = \text{Log}\,1 + C = 0 + C \qquad \text{de donde} \qquad C = 0.$$

Llevemos este valor a la fórmula general de S

$$S = \text{Log}\,x + C = \text{Log}\,x.$$

Basta entonces con hacer $x = 2$ para tener la superficie hasta esta abscisa

$$S = \text{Log}\,2,$$

y, para $x = \infty$, la superficie total es

$$S = \text{Log}\,\infty = 2{,}3 \cdot \log_{10} \infty = \infty.$$

La superficie es infinita.

2.° Ejemplo. — *Sea la curva* $y = \frac{1}{x^2}$ (fig. 6), *que es una rama de hipérbola. Calcular, igualmente, la superficie entre la curva y el eje de las x, desde:*

1.° $x = 1$ hasta $x = 2$;
2.° $x = 1$ hasta $x = \infty$.

Se tiene

$$S = \int y\,dx = \int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} + C.$$

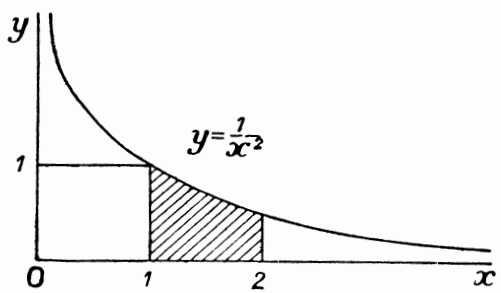


FIG. 6

Para calcular C, coloquémonos en los límites: así, se ve en la curva que

para $x = 1 \quad S = 0,$

tendremos, pues, aplicando estos valores, a la fórmula general:

$$0 = -\frac{1}{1} + C \quad \text{de donde} \quad C = 1.$$

Llevemos este valor de C a la fórmula general de S

$$S = -\frac{1}{x} + C = -\frac{1}{x} + 1,$$

basta con hacer $x = 2$ y después $x = \infty$:

para $x = 2 \quad S = -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}$

para $x = \infty \quad S = -\frac{1}{\infty} + 1 = 0 + 1 = 1.$

Así, la superficie total es igual a 1, es decir, igual a la del cuadrado inicial, de abscisa 1 y de ordenada 1.

En la curva precedente la superficie total, para $x = \infty$, era infinita; pero aquí la curva $\frac{1}{x^2}$ se aproxima al eje de las x mucho más rápidamente que la precedente, por lo cual la suma infinita de todos los $y\,dx$ *no es infinita.*

Todo depende de la ley de la curva, y, según el caso, una suma infinita tiende hacia un límite o hacia infinito.

Así, la suma de un número infinito de términos de la progresión geométrica $\left(\text{de razón } \frac{1}{2}\right)$

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots = \frac{a}{1-r} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = +2$$

mientras que la suma siguiente vale:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} \ldots = \infty.$$

en efecto, esta es la serie armónica, divergente, que hemos estudiado en el Tomo II.

3.er **Ejemplo.** — *Hallar la ecuación de las curvas tales que, en cada punto, la pendiente de la tangente a la curva sea igual a* $-\frac{x}{y}$.

La pendiente de la tangente en un punto de una curva es y', luego tendremos

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{-x}{y}$$

o bien

$$x\,dx = -y\,dy.$$

Integremos

$$\int x\,dx = \int -y\,dy$$

$$\frac{x^2}{2} = -\frac{y^2}{2} + C$$

o bien

$$x^2 + y^2 = 2C.$$

Esta ecuación representa una familia de círculos, cuyo centro está en el origen y cuyo radio vale $\sqrt{2C}$, habiendo tantos círculos como valores de C.

Pero si se impone, *por ejemplo,* la condición de que el círculo pase por el punto de abscisa 2 y ordenada 3, se tendrá entonces el valor de C.

En efecto, se tiene

$$2^2 + 3^2 = 13 = 2C$$

de donde

$$C = \frac{13}{2},$$

el radio de este círculo está entonces dado por la fórmula

$$x^2 + y^2 = R^2 = 13$$

de donde

$$R = \sqrt{13}.$$

4.º **Ejemplo.** — En este ejemplo vamos a ver que una constante tiene a menudo una significación física.

Busquemos la ley del movimiento rectilíneo de un cuerpo cuya aceleración es constante; la llamaremos a.

Se trata de encontrar la ley del espacio recorrido x en función del tiempo t: $x = f(t)$.

— Se sabe que la velocidad es la derivada del espacio recorrido

$$v = \frac{dx}{dt}$$

y que la aceleración a es la derivada de la velocidad v

$$a = \frac{dv}{dt}.$$

Se deduce que

$$dv = a \cdot dt$$

luego integrando

$$v = \int a \cdot dt = a \int dt = at + C.$$

Para calcular C, supongamos que, para $t = 0$, la velocidad es igual a V_0, lo que da

$$V_0 = a \cdot 0 + C \qquad \text{de donde} \qquad C = V_0$$

y la fórmula de la velocidad queda

$$v = at + V_0.$$

Pero como

$$dx = v\,dt$$

integrando y sustituyendo el valor de v será

$$x = \int v\,dt = \int (at + V_0)dt$$

$$= a \int tdt + V_0 \int dt$$

$$= \frac{1}{2} at^2 + V_0 t + K.$$

Para calcular K, supongamos que, para $t = 0$, el espacio recorrido sea ya igual a x_0, lo que da

$$x_0 = 0 + 0 + K \qquad \text{de donde} \qquad K = x_0.$$

Se tendrá, pues, finalmente

$$x = \frac{1}{2} at^2 + V_0 t + x_0.$$

Esta es la ley de la caída de los cuerpos cuando a corresponde a la aceleración g de la gravedad.

Si, por casualidad, $x_0 = 0$ y $V_0 = 0$, quedará (con $a = g$):

$$\left| \begin{array}{l} x = \frac{1}{2} gt^2 \\ v = gt. \end{array} \right.$$

y

Eliminando t entre estas dos ecuaciones, se encuentra

$$v = \sqrt{2gx}$$

que da la velocidad alcanzada al caer libremente desde una altura x.

CAPITULO III

INTEGRALES DEFINIDAS

8. Definición y cálculo. — Sea a calcular la superficie S comprendida entre la curva $y = f(x)$ y el eje de las x, desde $x = a$ hasta $x = b$ (fig. 7). Dicha superficie es igual a la diferencia de las dos superficies rayadas:

S = superficie OMBb — superficie OMAa,

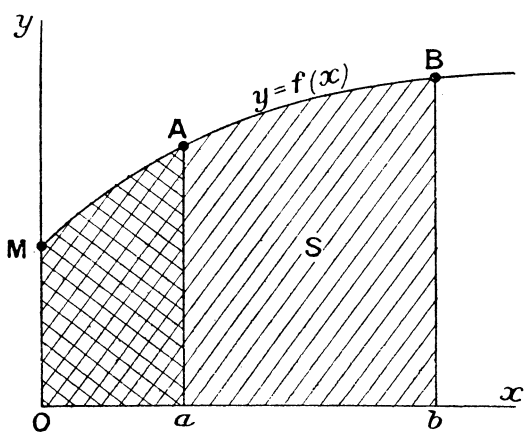


FIG. 7

y se escribe simbólicamente

$$S = \int_a^b y \cdot dx$$

es, pues, una integral *definida* en la que x varía desde a hasta b, la cual se enuncia así:

«*S igual a integral entre a y b de* $y \cdot dx$.»

Se verá a continuación que en una integral de este tipo no existe constante C.

— Calculemos la integral, y llamemos $F(x)$ a la función primitiva de y. Se tendrá pues, contando las superficies a partir de $x = 0$:

superficie $OMBb = F(b) + C$

superficie $OMAa = F(a) + C$

de donde

$$S = F(b) + C - [F(a) + C] = F(b) - F(a)$$

que se escribe

$$S = \int_a^b f(x)dx.$$

Vemos claramente que la constante ha desaparecido.

Esta definició nsupone que a y b son finitas y que y no se hace infinita.

Cálculo de una integral definida.

Hay que efectuar cuatro operaciones:

1.° Calcular la integral indefinida (sin ocuparse de los límites). Se escribe entre corchetes, poniendo a continuación los límites;

2.° Reemplazar x por el límite superior y calcular el resultado;

3.° Reemplazar x por el límite inferior y calcular el resultado;

4.° Efectuar la diferencia de estos dos resultados, restando el segundo del primero.

Así, una integral definida no depende más que de los límites.

NOTA. — Debe siempre situarse en la parte inferior del signo $\int$ el valor inicial de x, y en la parte superior el valor final de x. Finalmente, si hay un signo menos al principio, es preciso escribirle siempre *fuera de la integral.*

9. Ejemplos de integrales definidas.

1.° $$\int_0^2 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^2 = \frac{1}{3}\left[2^3 - 0^3\right] = \frac{8}{3}.$$

2.° $$\int_0^{\pi} \operatorname{sen} x\, dx = -\left[\cos x\right]_0^{\pi} = -\left[\cos \pi - \cos 0\right]$$

$$= -[-1 - 1] = +2.$$

3.° $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx = \left[\operatorname{sen} x\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} = \left[\operatorname{sen}\frac{\pi}{2} - \operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right]$

$$= [1 - (-1)] = 2.$$

4.° $$\int_0^1 (2x^2 + 1)dx.$$

Puede escribirse, dividiendo esta integral en dos:

$$\int_0^1 2x^2\,dx + \int_0^1 dx = 2\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 + \left[x\right]_0^1$$

$$= \frac{2}{3}[1^3 - 0] + [1 - 0] = \frac{2}{3} + 1 = \frac{5}{3}.$$

5° $$\int_0^{\pi} \frac{\operatorname{sen} x\,dx}{\cos^3 x}.$$

Hagamos $\cos x = u$, de donde $du = -\operatorname{sen} x\,dx$, luego $\operatorname{sen} x\,dx = -du$.

La integral queda

$$\int -\frac{du}{u^3} = -\frac{u^{-3+1}}{-3+1} = +\frac{1}{2u^3} = \left[\frac{1}{2\cos^2 x}\right]_0^{\pi}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{\cos^2 \pi} - \frac{1}{\cos^2 0}\right] = \frac{1}{2}(1 - 1) = 0.$$

6.° $$\int_1^{\frac{7}{4}} \frac{dx}{9 + 16(x-1)^2}.$$

Puesto que tiene la forma de un *arco tangente*, dividamos el numerador y el denominador por 9:

$$\int \frac{\frac{dx}{9}}{1 + \frac{16}{9}(x-1)^2} \qquad \text{haciendo} \qquad \frac{16}{9}(x-1)^2 = u^2$$

de donde

$$u = \frac{4}{3}(x-1) \qquad du = \frac{4}{3}dx \qquad \text{y} \qquad dx = 3\frac{du}{4}.$$

La integral queda

$$\frac{1}{9}\int \frac{\frac{3\,du}{4}}{1+u^2} = \frac{3}{36}\int \frac{du}{1+u^2} = \frac{1}{12}\operatorname{arc\,tg} u$$

y, reemplazando los límites

$$= \frac{1}{12}\left[\operatorname{arc\,tg}\frac{4}{3}(x-1)\right]_1^{\frac{7}{4}}$$

$$= \frac{1}{12}\left[\operatorname{arc\,tg}\frac{4}{3}\left(\frac{7}{4}-1\right) - \operatorname{arc\,tg}\frac{4}{3}(1-1)\right]$$

$$= \frac{1}{12}\left[\operatorname{arc\,tg} 1 - \operatorname{arc\,tg} 0\right] = \frac{1}{12}\left(\frac{\pi}{4}-0\right) = \frac{\pi}{48}.$$

7.° *Calcular el trabajo que es preciso realizar para alargar un resorte de longitud l, sabiendo que la fuerza es proporcional al desplazamiento* $F = K \cdot x$.

El trabajo total no es $F \cdot l$ puesto que F varía a lo largo del desplazamiento.

Coloquémonos a la distancia x del punto de partida (donde la fuerza inicial es cero al no estar el resorte tenso en el momento inicial). En este punto la fuerza es:

$$F = Kx.$$

Durante un desplazamiento dx, muy pequeño, el trabajo será (ver Tomo II, *Cálculo diferencial*):

$$dW = F \cdot dx = Kx \cdot dx$$

y el trabajo total, de 0 a l, será

$$W = \int_0^l Kx\,dx = K\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^l$$

$$= K\left[\frac{l^2}{2} - 0\right] = \frac{Kl^2}{2} = \frac{Kl}{2}\cdot l.$$

Haremos notar que $\frac{Kl}{2}$ es el valor de la fuerza en el punto medio del camino recorrido, luego todo ocurre como si esta fuerza media fuera desplazada una longitud l.

8.° *Calcular la energía suministrada por un condensador eléctrico que se descarga.*

— Sea C su capacidad, V la diferencia de potencial entre sus bornas y Q la carga eléctrica que contiene ($Q = C \cdot V$).

No siendo instantánea la descarga, situémonos en un instante cualquiera, al cabo del tiempo t. En este momento queda en el condensador una carga q y la diferencia de potencial en bornas es $v = \frac{q}{C}$.

Durante un tiempo dt sale una carga dq del condensador (dt es tan pequeña que v se supone constante), y la energía suministrada por dq culombios que «*sufren una caída*» de v voltios es:

$$dW = v \cdot dq \qquad \text{(en julios)}$$

la energía total será

$$W = \int_Q^0 v\, dq = \int_Q^0 \frac{q}{C}\, dq,$$

en efecto, siendo q la variable, esta carga varía desde Q al principio hasta cero al final de la descarga,

$$W = \frac{1}{C}\left[\frac{q^2}{2}\right]_Q^0 = \frac{1}{C}\left[0 - \frac{Q^2}{2}\right]$$

$$= -\frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = -\frac{1}{2}\frac{C^2V^2}{C}$$

$$= -\frac{1}{2}CV^2.$$

Vuelve a encontrarse así la energía contenida en C en el estado potencial, indicando el signo menos que se trata de una energía recuperada.

9.° *Calcular*

$$\int_0^{2\pi} \operatorname{sen} mx\, dx$$

donde m es un número cualquiera, par o impar.

Hagamos

$$mx = u \qquad \text{de donde} \qquad m \cdot dx = du \qquad \text{y} \qquad dx = \frac{du}{m}.$$

La integral queda

$$\int \operatorname{sen} u \cdot \frac{du}{m} = -\frac{1}{m}\left[\cos mx\right]_0^{2\pi}$$

$$= -\frac{1}{m}\left[\cos 2m\pi - \cos 0\right],$$

ahora bien, como cos $m2\pi$ es siempre igual a 1, sea m par o impar, se tendrá:

$$= -\frac{1}{m}\left[1 - 1\right] = 0.$$

Así, la integral de un seno, entre ó y 2π, es siempre nula, cualquiera que sea el valor del ángulo.

Se hallaría igualmente

$$\int_0^{2\pi} \cos\ mx\, dx = \frac{1}{m}\left[\operatorname{sen} mx\right]_0^{2\pi}$$

$$= \frac{1}{m}\left[\operatorname{sen} m2\pi - \operatorname{sen} 0\right] = \frac{1}{m}\left[0 - 0\right] = 0.$$

Es, pues, lo mismo para un coseno entre 0 y 2π, y estas notas nos servirán en el Tomo IV en el estudio de la serie de FOURIER, y en los ejemplos de aplicación.

10. Inversión de los límites.

Teorema. —*Si se invierten los dos límites de una integral definida, el resultado de dicha integral cambia de signo.*

— Sea

$$\mathrm{I} = \int_a^b f(x)dx = \mathrm{F}(b) - \mathrm{F}(a).$$

Consideremos ahora $\int_b^a f(x)dx$. Se tendrá

$$\int_b^a f(x)dx = \mathrm{F}(a) - \mathrm{F}(b)$$

$$= -\left[\mathrm{F}(b) - \mathrm{F}(a)\right] = -\mathrm{I}$$

El teorema está, pues, demostrado.

— Se tendrá, por ejemplo:

$$\int_0^1 x\,dx = -\int_1^0 x\,dx = -\left[\frac{x^2}{2}\right]_1^0$$
$$= -\left[0 - \frac{1}{2}\right] = \frac{1}{2}.$$

11. Fraccionamiento de una integral definida. — Se puede siempre fraccionar una integral definida en varias partes.

Sea, en la figura 8 ,la superficie S de la curva $y = f(x)$ desde $x = a$ hasta $x = b$, siendo c una abscisa comprendida entre a y b.

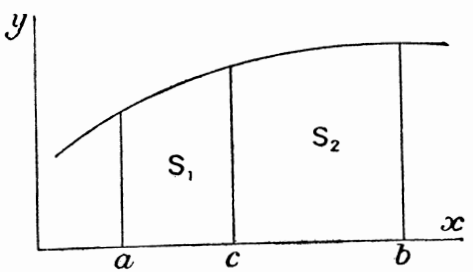


FIG. 8

Llamemos S_1 a la superficie de a a c y S_2 a la superficie de c a b. Tenemos, *evidentemente*, que

$$S = S_1 + S_2$$

o bien

$$\int_a^b y\,dx = \int_a^c y\,dx + \int_c^b y\,dx$$

suponiendo que la curva no atraviesa el eje de las x.

Tendríamos por ejemplo

$$\int_0^2 x^2\,dx = \int_0^1 x^2\,dx + \int_1^2 x^2\,dx$$
$$= \frac{1}{3}\left[x^3\right]_0^1 + \frac{1}{3}\left[x^3\right]_1^2$$
$$= \frac{1}{3}(1-0) + \frac{1}{3}(8-1) = \frac{1}{3} + \frac{7}{3}$$
$$= \frac{8}{3},$$

resultado que se ha encontrado anteriormente.

Consecuencia. — Si se tiene dos límites *iguales*, pero de signos contrarios, es más práctico integrar entre 0 y el límite positivo, multiplicando después por dos el resultado, *ya que es mucho más sencillo, desde el punto de vista de los cálculos, que uno de los límites valga cero*, a condición de que la curva sea simétrica.

EJEMPLO. — Volvamos a tomar la integral ya estudiada anteriormente:

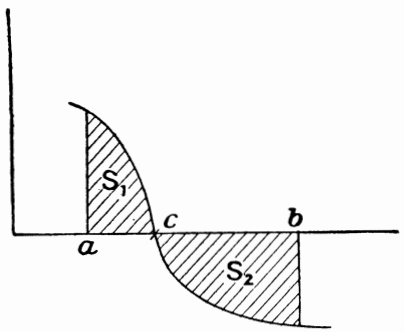


FIG. 9

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \cos x\, dx = 2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos x\, dx$$

$$= 2\Big[\operatorname{sen} x\Big]_{0}^{\frac{\pi}{2}} = 2[1 - 0] = 2,$$

resultado ya hallado.

Caso particular. — Pudiera ocurrir que la función y se hiciera nula en el intervalo ab (fig. 9).

En este caso, cuando y es positiva, la superficie es positiva, aquí es, pues, S_1 positiva; y cuando y es negativa la superficie es negativa, en este caso S_2.

Luego, integrando desde a hasta b para tener la superficie total, se encontrará la suma algebraica:

$$S = S_1 - S_2.$$

Si se quiere *realmente* la superficie total, se hará la suma *aritmética* de los valores absolutos:

$$S = |S_1| + |S_2|.$$

EJEMPLO. — *Sea calcular la superficie de la curva*

$$y = \operatorname{sen} x$$

desde $x = \frac{\pi}{2}$ hasta $x = \frac{3\pi}{2}$ (fig. 10).

Se tendrá

$$S = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \operatorname{sen} x\, dx = -\left[\cos x\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}$$

$$= -\left[\cos\frac{3\pi}{3} - \cos\frac{\pi}{2}\right] = 0$$

lo cual es normal al ser iguales las dos superficies. Pero si se quisiera realmente *el valor* de la superficie, bastaría con hacer dos integrales: la primera desde $\frac{\pi}{2}$ a π y la segunda π a $\frac{3\pi}{2}$. Pero aquí, por simetría, bastará con calcular una de las dos integrales y duplicar el resultado:

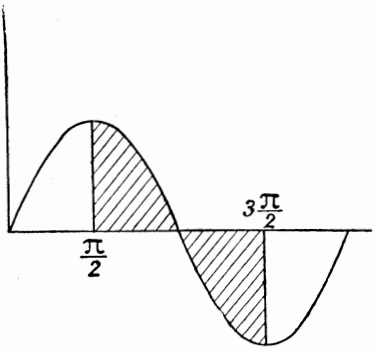


FIG. 10

$$S = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \operatorname{sen} x\, dx = -2\left[\cos x\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = -2\left[\cos\pi - \text{g}\cos\frac{\pi}{2}\right]$$

$$= -2\,(-1-0) = +2.$$

Este valor es, evidentemente, el mismo que el de la superficie desde 0 hasta π.

— Se ve de esta forma, cuándo se ha de calcular una integral definida, que es indispensable trazar la curva para ver si, entre los límites, la función y no se hace nula.

12. Caso en que uno de los límites es infinito. — En este caso, puede ocurrir que la integral tenga un valor finito o que se haga infinita; todo depende de la ecuación de la curva porque, en efecto, una curva puede aproximarse más o menos rápidamente a una asíntota, y la superficie entre la curva y la asíntota no es forzosamente infinita, incluso aunque x se haga infinita.

EJEMPLOS.

1.° *Calcular la superficie entre la curva* $y = \frac{1}{x}$ (ver fig. 5)

a) *desde* $x = 1$ *hasta* $x = \infty$;

b) *desde* $x = 0$ *hasta* $x = 1$.

Ya hemos tratado este problema como ejemplo de determinación de constante. Pero también se puede hacer por una integral definida:

a) $$S = \int_1^{\infty} \frac{1}{x}\,dx = \Big[\operatorname{Log} x\Big]_1^{\infty} = \operatorname{Log}\infty - \operatorname{Log} 1$$
$$= \infty - 0 = \infty,$$

luego la superficie es infinita.

b) $$S = \int_0^1 \frac{dx}{x} = \Big[\operatorname{Log} x\Big]_0^1 = \operatorname{Log} 1 - \operatorname{Log} 0$$
$$= 0 + \infty = +\infty$$

esta superficie es también infinita, como ya fue hallado.

2.° *El mismo problema para la curva* $y = \frac{1}{x^2}$.

a) de 1 a ∞ se tiene $$S = \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2} = -\left[\frac{1}{x}\right]_1^{\infty}$$
$$= -\left[\frac{1}{\infty} - \frac{1}{1}\right] = -[0 - 1] = +1$$

esta superficie no es infinita, sino igual a la del cuadrado inicial cuya abscisa es 1.

b) de 0 a 1 se tiene $$S = \int_0^1 \frac{dx}{x^2} = -\left[\frac{1}{x}\right]_0^1$$
$$= -\left[\frac{1}{1} - \frac{1}{0}\right] = \infty,$$

esta superficie es, por el contrario, ¡infinita!

3.° *Sea calcular*

$$S = \int_0^a \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

Si se traza la curva de la función

$$y = \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}},$$

se halla la curva de la figura 11, en la que y se hace infinita para $x = a$. Podríamos entonces preguntarnos si la superficie S es infinita o no.

Se tiene

$$S = \int_0^a \frac{\frac{dx}{a}}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}} = \int_0^a \frac{du}{\sqrt{1 - u^2}} = [\text{arc sen } u]$$

$$= \left[\text{arc sen } \frac{x}{a}\right]_0^a = \text{arc sen } 1 - \text{arc sen } 0$$

$$= \frac{\pi}{2} - 0 \qquad = \frac{\pi}{2}.$$

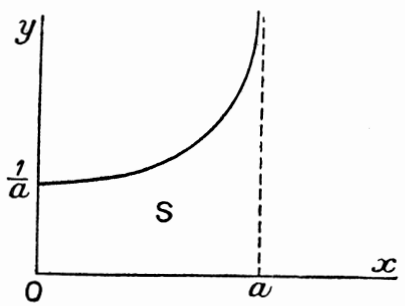


FIG. 11

Así, cosa curiosa, esta superficie es igual a $\frac{\pi}{2}$, siendo pues independiente del límite a.

4.° *Sea calcular*

$$S = \int_{-\infty}^{1} e^x \, dx.$$

Será

$$S = \left[e^x\right]_{-\infty}^{1} = e^1 - e^{-\infty} = e - \frac{1}{e^{\infty}}$$

$$= e.$$

por lo que la superficie es, pues, finita.

13. Caso en que la función $y = f(x)$ se hace infinita entre los límites. — Puede ocurrir por fin que, entre los límites, la función $y = f(x)$ se haga infinita. Por tanto es indispensable, *antes de integrar*, trazar la curva $y = f(x)$ para ver si la ordenada no se hace infinita. En caso contrario, estamos expuestos a encontrar un resultado falso, como se va a ver.

EJEMPLOS.

1.° $$I = \int_{-1}^{+1} \frac{dx}{x^2}$$

Si no tomamos precauciones, tendremos:

$$I = -\left[\frac{1}{x}\right]_{-1}^{+1} = -\left[\frac{1}{1} - \frac{1}{-1}\right] = -2$$

¡resultado completamente falso! En efecto, la función se hace infinita en el intervalo (fig. 12).

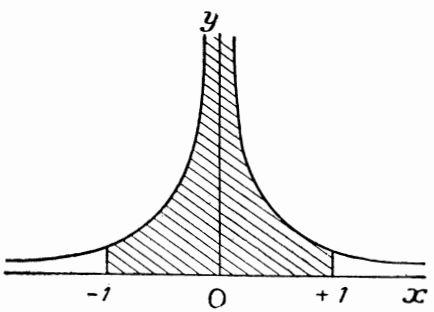


FIG. 12

— Es preciso en realidad hacer dos integrales: de —1 a 0, y después de 0 a + 1. Pero, como en este caso, la curva es simétrica, puede integrarse de 0 a 1 y duplicar:

$$I = 2\int_{0}^{1} \frac{dx}{x^2} = \infty.$$

En efecto, anteriormente se ha calculado ya esta integral, que era infinita. La integral y la superficie son, pues, ambas infinitas.

2.° *Sea calcular* $$I = \int_{0}^{4} \frac{dx}{(x-2)^2}$$

Se tendría

$$I = -\left[\frac{1}{(x-2)}\right]_0^4 = -\left[\frac{1}{4-2} - \frac{1}{-2}\right] = -1 \quad (\text{¡Resultado falso!})$$

Debe escribirse

$$I = \int_0^2 \frac{dx}{(x-2)^2} + \int_2^4 \frac{dx}{(x-2)^2} = -\left[\frac{1}{x-2}\right]_0^2 - \left[\frac{1}{x-2}\right]_2^4 = -\infty + \infty.$$

La integral, es decir, la superficie de la curva es, pues, infinita en valor absoluto.

14. Algunas integrales ingeniosas. — Cuando se tiene que integrar una fracción en la que aparece en el numerador una cierta cantidad que se encuentra también en el denominador, es cómodo sumar y restar en el numerador la cantidad que sea necesaria para completar todo el denominador. Se divide a continuación la integral en dos integrales.

1.° *Calcular* $\quad I = \int \frac{x^2 dx}{x^2+1}.$

sumemos y restemos 1 al numerador, dividiendo después la integral en dos partes:

$$\int \frac{(x^2+1-1)dx}{x^2+1} = \int \frac{(x^2+1)dx}{x^2+1} - \int \frac{dx}{x^2+1}$$

$$= \int dx - \operatorname{arc\,tg} x = x - \operatorname{arc\,tg} x.$$

2.° *Calcular* $\quad I = \int \frac{2x+1}{2x-1}\, dx.$

Restemos y sumemos -1 al numerador, dividiendo seguidamente la integral en dos:

$$\int \frac{(2x+1-1+1)dx}{2x-1} = \int \frac{(2x-1)dx}{2x-1} + \int \frac{2dx}{2x-1}$$

$$= \int dx + \int \frac{du}{u} = x + \operatorname{Log}(2x-1).$$

3.° Se puede emplear un proceso semejante para la integral

$$\int \operatorname{tg}^2 x\, dx.$$

Sumemos y restemos 1:

$$\int (1 + \operatorname{tg}^2 x - 1)dx = \int (1 + \operatorname{tg}^2 x)dx - \int dx$$

$$= \int \frac{dx}{\cos^2 x} - x = \operatorname{tg} x - x.$$

De la misma forma se operaría para $\int \operatorname{tg}^m x\, dx$ (ver más adelante en las integrales trigonométricas).

CAPITULO IV

EJEMPLOS DE APLICACIONES PRACTICAS DE LAS INTEGRALES

Antes de continuar estudiando los procedimientos de integración, demos, *desde ahora,* tres ejemplos de aplicaciones prácticas de las integrales. Estos ejemplos son muy interesantes e instructivos, ya que muestran claramente cómo se plantea un problema en ecuación y cómo se resuelve por medio del cálculo integral.

Iremos lentamente, explicando el detalle de los cálculos, contrariamente a lo que se hace habitualmente...

15. Primera aplicación eléctrica. — Descarga de un condensador eléctrico a través de una resistencia. — Estudiemos la descarga de un condensador de capacidad C a través de una resistencia R, es decir, estudiemos cómo varía la corriente i en función del tiempo t, así como la d.d.p. v en función del tiempo:

$$i = f(t) \qquad v = \varphi(t).$$

Tomaremos letras mayúsculas para las cantidades fijas, y minúsculas para las variables (fig. 13).

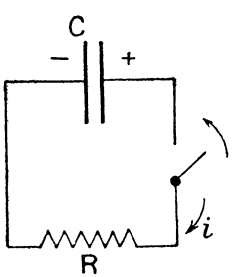


FIG. 13

— Sea V la d.d.p. en las bornas y Q la carga contenida en C:

$$Q = CV.$$

Coloquémonos al cabo del tiempo t tras el cierre del interruptor. En este momento, la carga que queda en el condensador es q (el condensador ha perdido ya una parte de su carga), y la d.d.p. en las bornas (que varía de V a 0) vale ahora v, teniéndose:

$$q = Cv.$$

Situémonos ahora en el tiempo $t + dt$. Durante el tiempo dt sale de C una carga dq (dt es tan pequeño que v se supone constante), y se tendrá

$$dq = -i \cdot dt$$

con signo menos, *porque la carga q disminuye y su diferencial es negativa.*

Por otra parte, en las bornas de R hay una d.d.p. de v voltios, y la ley de OHM nos da:

$$i = \frac{v}{R}$$

que se puede poner

$$-\frac{dq}{dt} = \frac{q}{CR}.$$

Para calcular q en función de t será preciso integrar, pero antes separemos las variables:

$$\frac{dq}{q} = -\frac{dt}{CR}.$$

Integremos

$$\int \frac{dq}{q} = -\frac{1}{CR}\int dt + K.$$

Como lo que va a resultar es un logaritmo neperiano, llamemos a la constante Log K en vez de K, lo que conduce a cambiar el nombre de la constante, ya que el logaritmo de una constante es también una constante; pero los cálculos se simplificarán. Se tendrá así

$$\text{Log } q = -\frac{1}{CR} \cdot t + \text{Log K}$$

o bien

$$\text{Log } q - \text{Log K} = -\frac{t}{CR}$$

$$\text{Log } \frac{q}{K} = -\frac{t}{CR}$$

$$\frac{q}{K} = e^{-\frac{t}{CR}}$$

luego

$$q = Ke^{-\frac{t}{CR}}.$$

Para calcular la constante K, coloquémonos en los límites:

para $t = 0 \qquad q = Q,$

luego se tendrá $Q = K \cdot e^0 = K.$

Llevemos este valor a la fórmula general de q, luego

$$q = Q \cdot e^{-\frac{t}{CR}}$$

$$i = -\frac{dq}{dt} = -Q \cdot e^{-\frac{t}{CR}}\left(-\frac{1}{CR}\right)$$

$$= \frac{Q}{CR} e^{-\frac{t}{CR}},$$

pero $Q = CV$, luego $\frac{Q}{CR}$ vale $\frac{V}{R}$, que es la corriente inicial I_0 en el momento en que se cierra el interruptor (pero que decrece enseguida).

$$\boxed{i = I_0 e^{-\frac{t}{CR}}} = I_0 \cdot \frac{1}{e^{\frac{t}{CR}}}.$$

Es una exponencial decreciente (fig. 14).

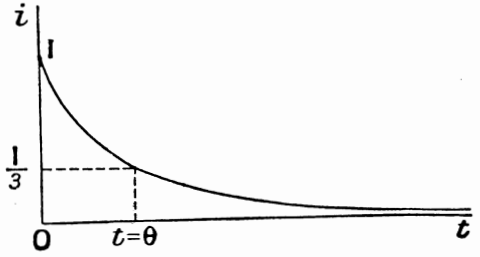


FIG. 14 *a*

Se sabe que el producto CR se llama constante de tiempo τ del circuito:

$$\boxed{\tau = C \cdot R}$$

R en ohmios
C en faradios
τ en segundos

siendo la que rige la velocidad con la que se descarga el condensador.

Se puede ver que τ es el tiempo al cabo del cual la corriente i es un tercio de su valor inicial I_0.

En efecto, hagamos $t = CR$ en la fórmula de i:

$$i = I_0 \cdot \frac{1}{e^{\frac{CR}{CR}}} = \frac{I_0}{e} \approx \frac{I_0}{3}.$$

Tracemos la curva de i:

para $t = 0$ $\quad i = I_0$

para $t = \infty$ $\quad i = \frac{I_0}{\infty} = 0.$

Calculemos i'

$$i' = I_0 \cdot e^{-\frac{t}{CR}} \left(-\frac{1}{CR}\right) = -\frac{I_0}{\tau} \cdot e^{-\frac{t}{CR}}$$

para $t = 0$ $\quad i' = -\frac{I_0}{\tau} = \operatorname{tg} \alpha,$

para $t = \infty$ $\quad i' = 0,$

y se ve que

si τ es grande, el ángulo α es pequeño, i disminuye lentamente,

si τ es pequeño, el ángulo α es grande, i disminuye rápidamente.

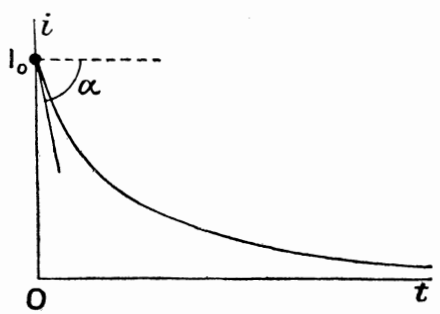


FIG. 14 *b*

La derivada i' no puede anularse, luego no hay ni máximo ni mínimo; dicha derivada es siempre negativa y la corriente i disminuye sin cesar, lo que da la figura 14 *a*.

La d.d.p. v está dada por

$$v = \frac{q}{C} = \mathrm{V} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{t}{\mathrm{CR}}}$$

lo que da una curva de la misma forma, y, al cabo de $t = \tau$, $v \approx \frac{\mathrm{V}}{3}$.

NOTA. — Se hubiera podido pasar por una integral definida, siendo los límites

0 y t para el tiempo t,
Q y q para la carga q,

pues nosotros calculamos q al cabo del tiempo t, y los límites deben corresponderse:

para $t = 0$ $q = \mathrm{Q}$

y

para $t = t$ $q = q$.

Se tendrá, pues, volviendo a tomar la ecuación del principio

$$\int_{\mathrm{Q}}^{q} \frac{dq}{q} = -\frac{1}{\mathrm{CR}} \int_{0}^{t} dt$$

calculando la integral

$$[\mathrm{Log}\, q]_{\mathrm{Q}}^{q} = -\frac{1}{\mathrm{CR}} [t]_{0}^{t}$$

$$\mathrm{Log}\, q - \mathrm{Log}\, \mathrm{Q} = -\frac{t}{\mathrm{CR}}$$

$$\mathrm{Log}\, \frac{q}{\mathrm{Q}} = -\frac{t}{\mathrm{CR}}$$

de donde

$$\frac{q}{\mathrm{Q}} = e^{-\frac{t}{\mathrm{CR}}}$$

luego

$$q = \mathrm{Q} \cdot e^{-\frac{t}{\mathrm{CR}}},$$

De esta forma vuelve a hallarse la misma fórmula, sin haber tenido necesidad de calcular una constante.

—Puede uno plantearse la siguiente cuestión: hallar al cabo de cuánto tiempo la corriente i y la d.d.p. v se harán iguales a $\frac{1}{100}$ de su valor inicial, en cuyo caso se admite que la descarga está prácticamente terminada.

Se tendrá

$$i = \frac{I_0}{100} = I_0 \cdot e^{-\frac{t}{CR}}$$

que equivale a

$$100 = e^{\frac{t}{CR}}$$

tomando logaritmos

$$\text{Log } 100 = \text{Log}\left(e^{\frac{t}{CR}}\right) = \frac{t}{CR} \cdot \text{Log } e = \frac{t}{CR}$$

de donde

$$\begin{aligned} t &= CR \cdot \text{Log } 100 \\ &= \tau \cdot 2{,}3 \log_{10} 100 \\ &= 4{,}6\,\tau \end{aligned}$$

es decir, aproximadamente 5τ. Análogamente para la d.d.p. v.

Ejemplo numérico.—Supongamos

$$C = 10\mu F, \qquad V = 10.000\ V, \qquad R = 1\ M\Omega.$$

$$I_0 = \frac{V}{R} = \frac{10^4}{10^6} = 0{,}01\ A \quad \text{o bien} \quad 10\ mA,$$

$$\tau = CR = (10 \cdot 10^{-6}) \cdot 10^6 = 10 \text{ segundos.}$$

Al cabo de 10 segundos, la corriente será todavía igual a $\frac{10}{2{,}7} = 3{,}7$ miliamperios y la d.d.p. será $\frac{10.000}{2{,}7} = 3.700$ voltios.

Finalmente, al cabo de 5τ, o sea 50 segundos (¡cerca de un minuto!), la corriente será $\frac{10\ mA}{100} = 0{,}1$ mA y la d.d.p. $\frac{10.000}{100} = 100$ voltios.

—Se ve así que este condensador tarda mucho en descargarse.

NOTA. — Estudiaremos en el Tomo V la carga de un condensador a través de una resistencia como aplicación de las ecuaciones diferenciales de primer orden.

Cálculo de la energía calorífica suministrada: Durante un tiempo *dt*, la energía disipada en la resistencia R, expresada en julios, es igual a

$$dW = Ri^2 dt$$

integrando

$$W = \int Ri^2\,dt = \int Ri \cdot i\,dt$$

$$= -\int v \cdot dq = -\int \frac{q \cdot dq}{C}.$$

Siendo q la variable, los límites serán Q y 0:

$$W = -\frac{1}{C}\int_Q^0 q\,dq = -\frac{1}{C}\left[\frac{q^2}{2}\right]_Q^0$$

$$= \frac{1}{2}CV^2.$$

Se recupera así, en calor, la energía potencial que estaba contenida en el condensador.

Se habría podido también escribir, siendo t la variable:

$$W = \int_0^\infty RI_0^2 e^{-\frac{2t}{CR}}\,dt \qquad \text{con} \qquad -\frac{2t}{CR} = u$$

de donde

$$du = -\frac{2dt}{CR} \qquad \text{y} \qquad dt = -\frac{CR\,du}{2}$$

luego

$$W = RI_0^2 \int e^u \left(-CR\frac{du}{2}\right) = -\frac{CR^2I_0^2}{2}\int e^u du$$

$$= -\frac{CR^2I_0^2}{2}\left[e^{-\frac{2t}{CR}}\right]_0^\infty$$

$$= -\frac{CR^2I_0^2}{2}\left[\frac{1}{\infty} - \frac{1}{1}\right] = +\frac{CR^2I_0^2}{2},$$

pero como $RI_0 = V$,

será $W = \frac{1}{2}CV^2$

16. Segunda aplicación. — *Tenemos un condensador eléctrico de capacidad C, unido permanentemente a una fuente continua cuya electromotriz es E. Calcular el trabajo que es preciso realizar para desplazar una de las placas una distancia D paralelamente a sí misma (el aislante es el aire).*

—Sea e la distancia inicial de las dos placas; se demuestra en electricidad que la fuerza atractiva que se ejerce sobre cada placa es (sistema SI):

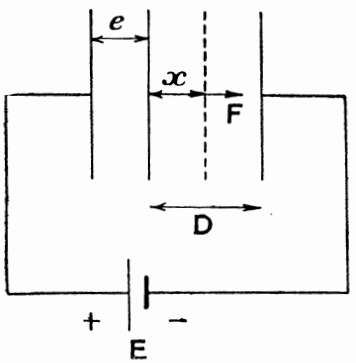


FIG. 15

$$F = \frac{\varepsilon_0}{2}\frac{SE^2}{e^2}\left(\varepsilon_0 = \frac{1}{4\pi \times 9 \times 10^9}\right)$$

Es preciso, pues, realizar un trabajo para desplazar una de las placas (es decir, proporcionar energía).

El trabajo total no es F.D, puesto que F varía en cada instante. Coloquémonos, pues, a la distancia x del punto de partida (fig. 15). Siendo la distan de las placas $e + x$, la fuerza atractiva es en este momento:

$$F = \frac{\varepsilon_0}{2}\frac{SE^2}{(e+x)^2}.$$

Demos a x un incremento dx; el trabajo será (dx es tan pequeño que F se supone constante):

$$dW = F \cdot dx$$

y como x varía de 0 a D, el trabajo total será:

$$W = \int_0^D \frac{\varepsilon_0}{2}\frac{SE^2}{(e+x)^2}\,dx = \frac{\varepsilon_0}{2}SE^2\int_0^D \frac{dx}{(e+x)^2} \qquad \begin{pmatrix} e+x=u \\ du=dx \end{pmatrix}$$

$$= -\frac{\varepsilon_0}{2}SE^2 \cdot \left[\frac{1}{e+x}\right]_0^D = -\frac{\varepsilon_0}{2}SE^2\left[\frac{1}{e+D} - \frac{1}{e}\right]$$

$$= -\frac{\varepsilon_0}{2}SE^2\left[\frac{e-e-D}{e(e+D)}\right] = \frac{\varepsilon_0}{2}\frac{SE^2D}{e(e+D)}$$

$$= \frac{\varepsilon_0}{2}\frac{SE^2}{e^2}\left(\frac{e}{1+\frac{e}{D}}\right) = F_{\text{inicial}} \cdot \frac{e}{1+\frac{e}{D}}.$$

17. Tercera aplicación. — *Calcular el flujo magnético captado por un cuadro rectangular situado a la distancia D de un hilo eléctrico muy largo, recorrido por una corriente I paralela a uno de los lados del cuadro y en el plano del cuadro* (fig. 16).

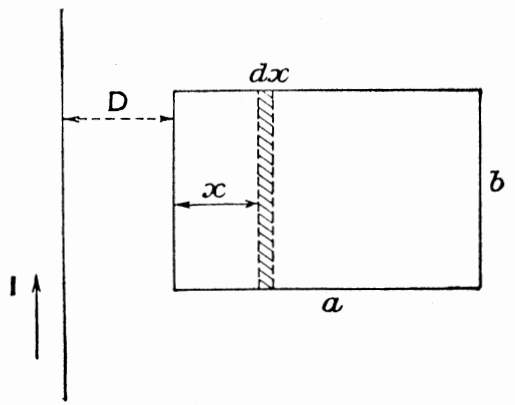


FIG. 16

— La inducción B a la distancia D de tal hilo está dada por la fórmula siguiente (ley de BIOT y SAVART):

$$B = 2 \times 10^{-7} \frac{I}{D}.$$

B en teslas
I en amperios
D en metros

Como B varía a todo lo largo del cuadro, situémonos a la distancia x del borde izquierdo del cuadro. En este punto la intensidad de la inducción es:

$$B = \frac{2I}{10(D + x)}.$$

Demos a x un incremento dx; el flujo captado por la rebanada de espesor dx será

$$d\Phi = B \cdot dS = B \cdot b \cdot dx$$

y, como x varía de 0 a a, se tendrá para el flujo total

$$\Phi = \int^{a} \mathrm{B}b\,dx = \int_0^a \frac{2 \times 10^{-7}\,\mathrm{I}}{\mathrm{D}+x}\,b\,dx$$

$$= 2 \times 10^{-7}\,\mathrm{I}b \int_0^a \frac{dx}{\mathrm{D}+x} = 2 \times 10^{-7}\,\mathrm{I}b\left[\mathrm{Log}\,(\mathrm{D}+x)\right]_0^a$$

$$= 2 \times 10^{-7}\,\mathrm{I}b[\mathrm{Log}\,(\mathrm{D}+a) - \mathrm{Log}\,\mathrm{D}]$$

$$= 2 \times 10^{-7}\,I\mathrm{b}\,\mathrm{Log}\,\frac{\mathrm{D}+a}{\mathrm{D}}.$$

Hagamos notar que a y b son expresadas en metros.

Si la corriente es *alterna*, la intensidad puede escribirse $i = \mathrm{I}\,\mathrm{sen}\,\omega t$, teniéndose:

$$\Phi = 2 \times 10^{-7}\,b\mathrm{I}\,\mathrm{sen}\,\omega t \cdot \mathrm{Log}\left(\frac{\mathrm{D}+a}{\mathrm{D}}\right);$$

como el flujo varía, hay una fuerza electromotriz inducida en el cuadro $e = -\dfrac{d\Phi}{dt}$, bastando con tomar la derivada respecto de t:

$$e = -\frac{d\Phi}{dt} = -2 \times 10^{-7}\,b\mathrm{I}\omega\,\cos\omega t \cdot \mathrm{Log}\left(\frac{\mathrm{D}+a}{\mathrm{D}}\right) \text{ voltios.}$$

NOTA: Veremos en el Tomo V un gran número de otras aplicaciones de las integrales: a la mecánica, acústica, termodinámica, radio, etc.

CAPITULO V

SEGUNDO PROCEDIMIENTO DE INTEGRACION

INTEGRACION POR PARTES

18. Principio. — Sea un producto $u \cdot v$, donde u y v son funciones de x. Diferenciemos:

$$d(u \cdot v) = v \cdot du + u \cdot dv$$

de donde

$$u \cdot dv = d(u \cdot v) - v \cdot du.$$

Integremos (cuando se tienen diferenciales iguales, las integrales también lo son, a diferencia de una constante):

$$\int u \cdot dv = \int d(u \cdot v) - \int v \cdot du,$$

pero sabemos que $\int dy = y$, se tendrá entonces:

$$\boxed{\int \mathbf{u} \cdot \mathbf{dv} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} - \int \mathbf{v} \cdot \mathbf{du}}$$

— Así, si la integral a calcular está en forma de producto $\int u \cdot dv$, aplicando la fórmula superior se obtendrá la integral $\int v \cdot du$, *pudiendo ocurrir que esta nueva integral sea más fácil de calcular que la primera.* Si, por el contrario, es más difícil, se hace preciso invertir los papeles de u y de dv (debiendo siempre dv contener a dx), volviendo a comenzar el cálculo. Si la nueva integral es aún más difícil, no debe entonces aplicarse este procedimiento.

Este procedimiento se aplica para integrar:

a) El producto de un polinomio en x por una exponencial;
b) El producto de un polinomio en x por un seno o un coseno;
c) El producto de una exponencial por un seno o un coseno;
d) El producto de un polinomio en x por un logaritmo;
e) Las tres funciones inversas *arc sen, arc cos* y *arc tg*;
f) Ciertas raíces cuadradas.

NOTA. — No olvidar que un cociente se puede poner en forma de producto.

Finalmente, resaltemos que, a veces, será preciso integrar por partes dos o tres veces seguidas.

19. Ejemplos.

1.° Sea calcular $\quad I = \int x \cdot \operatorname{sen} 2x\, dx.$

Hagamos

$$x = u \qquad \text{luego} \qquad du = dx$$

y

$$\operatorname{sen} 2x\, dx = dv \qquad \text{luego} \qquad v = -\frac{1}{2}\cos 2x$$

Tendremos entonces

$$I = uv - \int v \cdot du = x\left(-\frac{1}{2}\cos 2x\right) - \int\left(-\frac{1}{2}\cos 2x\right)dx$$

$$= -\frac{x}{2}\cos 2x + \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2x + C.$$

2.° *Calcular* $\quad I = \int (2x^2 - 1)\cos 3x\, dx.$

Hagamos

$$2x^2 - 1 = u \qquad \text{luego} \qquad du = 4x\, dx$$

y

$$\cos 3x\, dx = dv \qquad \text{luego} \qquad v = \frac{1}{3}\operatorname{sen} 3x.$$

Será

$$I = uv - \int v \cdot du = (2x^2 - 1)\frac{1}{3}\operatorname{sen} 3x - \int \frac{1}{3}\operatorname{sen} 3x \cdot 4x\, dx$$

$$= \frac{1}{3}(2x^2 - 1)\operatorname{sen} 3x - \frac{4}{3}\int x \cdot \operatorname{sen} 3x\, dx.$$

—Sigamos integrando por partes, *llamando todavía dv a la línea trigonométrica y u al polinomio en x, ya que si no se retrocedería, volviendo a obtener la expresión inicial.*

—Hagamos, pues, de nuevo

$$x = u \qquad \text{de donde} \qquad du = dx$$

y

$$\operatorname{sen} 3x\,dx = dv \qquad \text{de donde} \qquad v = -\frac{1}{3}\cos 3x.$$

Será, pues

$$I = \frac{1}{3}(2x^2 - 1)\operatorname{sen} 3x - \frac{4}{3}\left[x\left(-\frac{1}{3}\right)\cos 3x - \int -\frac{1}{3}\cos 3x \cdot dx\right]$$

Suprimamos el corchete:

$$I = \frac{1}{3}(2x^2 - 1)\operatorname{sen} 3x + \frac{4}{9}x \cdot \cos 3x - \frac{4}{9}\int \cos 3x\,dx$$

$$= \frac{1}{3}(2x^2 - 1)\operatorname{sen} 3x + \frac{4}{9}x \cdot \cos 3x - \frac{4}{27}\operatorname{sen} 3x + C.$$

3.° *Calcular* $\qquad I = \int x \cdot e^{2x}\,dx.$

Hagamos

$$e^{2x} = u \qquad \text{luego} \qquad du = 2e^{2x}dx$$

y

$$x\,dx = dv \qquad \text{luego} \qquad v = \frac{x^2}{2}.$$

Se tendrá

$$I = uv - \int v \cdot du = e^{2x} \cdot \frac{x^2}{2} - \int \frac{x^2}{2} \cdot 2e^{2x}dx,$$

y siendo esta última integral más complicada que la que buscamos (debido a la presencia de x^2), invertiremos los papeles, haciendo

$$x = u \qquad \text{de donde} \qquad du = dx$$

y

$$e^{2x}dx = dv \qquad \text{de donde} \qquad v = \frac{1}{2}e^{2x}$$

Esto da

$$I = x\frac{1}{2}e^{2x} - \int \frac{1}{2}e^{2x} \cdot dx = \frac{x}{2}e^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x}$$

$$= \frac{e^{2x}}{2}\left(x - \frac{1}{2}\right) + C.$$

4.° *Otro método para el cálculo de*

$$\int x \cdot \cos ax\, dx \qquad \text{o bien} \qquad \int x \cdot \operatorname{sen} ax\, dx.$$

Llamemos M a la primera y N a la segunda y calculemos M + jN:

$$M + jN = \int x \cdot \cos ax\, dx + j\int x \cdot \operatorname{sen} ax\, dx$$

$$= \int x(\cos ax + j \operatorname{sen} ax)dx,$$

ahora bien, el paréntesis puede, según la fórmula de EULER, expresarse mediante una exponencial imaginaria, o sea e^{jax} (ver Tomo II):

$$M + jN = \int xe^{jax}\, dx.$$

Hagamos

$$x = u \qquad \text{de donde} \qquad du = dx$$

y

$$e^{jax}\, dx = dv \qquad \text{luego} \qquad v = \frac{1}{ja}e^{jax},$$

de donde

$$M + jN = x \cdot \frac{1}{ja}e^{jax} - \int \frac{1}{ja}e^{jax} \cdot dx = -\frac{jx}{a}e^{jax} - \frac{1}{j^2a^2} \cdot e^{jax}$$

$$= e^{jax}\left(-j\frac{x}{a} + \frac{1}{a^2}\right) = (\cos ax + j \operatorname{sen} ax)\left(-\frac{jx}{a} + \frac{1}{a^2}\right)$$

Bastará entonces con identificar, lo mismo que se ha hecho cuando se tiene una igualdad de dos complejos:

$$\left|\begin{array}{l} M = \dfrac{1}{a^2}\cos ax + \dfrac{x}{a}\operatorname{sen} ax + C \\ N = \dfrac{1}{a^2}\operatorname{sen} ax - \dfrac{x}{a}\cos ax + C. \end{array}\right.$$

De esta forma se obtienen las dos integrales M y N al mismo tiempo

5.° *Calcular* $\quad I = \int e^{2x} \cdot \operatorname{sen} 3x\, dx.$

Hagamos

$$e^{2x} = u \qquad \text{por tanto} \qquad du = 2e^{2x}\, dx$$

y $$dv = \operatorname{sen} 3x\, dx \qquad \text{por tanto} \qquad v = -\frac{1}{3}\cos 3x.$$

De donde se obtiene

$$I = uv - \int v \cdot du = e^{2x}\left(-\frac{1}{3}\cos 3x\right) - \int -\frac{1}{3} 1 \cos 3x \cdot 2e^{2x}\, dx$$

$$= -\frac{1}{3} e^{2x} \cos 3x + \frac{2}{3}\int e^{2x} \cos 3x\, dx.$$

Llegamos así a una integral idéntica a I. Integremos otra vez por partes, llamando de nuevo u a la exponencial y dv a la línea trigonométrica, pues de lo contrario se retrocedería de nuevo a la expresión inicial de I.

Llamemos

$$e^{2x} = u \qquad \text{de donde} \qquad du = 2e^{2x}\, dx$$

y $$\cos 3x\, dx = dv \qquad \text{de donde} \qquad v = \frac{1}{3}\operatorname{sen} 3x.$$

Por lo que se tendrá

$$I = -\frac{1}{3} e^{2x} \cos 3x + \frac{2}{2}\left[e^{2x} \cdot \frac{1}{3}\operatorname{sen} 3x - \int \frac{1}{3}\operatorname{sen} 3x \cdot 2e^{2x}\, dx\right]$$

Pero esta última integral es justamente (aparte del coeficiente $\frac{2}{3}$) la integral I que buscamos. Podremos, pues, escribir, suprimiendo el corchete:

$$I = \frac{e^{2x}}{3}\left(-\cos 3x + \frac{2}{3}\operatorname{sen} 3x\right) - \frac{4}{9} I.$$

Pasando el último término de esta expresión al miembro de la izquierda, y operando, queda:

$$I\left(\frac{13}{9}\right) = \frac{e^{2x}}{3}\left(-\cos 3x + \frac{2}{3}\operatorname{sen} 3x\right)$$

es decir

$$I = \frac{9}{13}\cdot\frac{e^{2x}}{3}\left(-\cos 3x + \frac{2}{3}\operatorname{sen} 3x\right) + C.$$

Por el mismo procedimiento se integraría $\int e^{2x}\cdot\cos 3x\,dx$.

— Este procedimiento, por el cual vuelve a encontrarse la integral que se busca (pero con otro coeficiente) se emplea muy a menudo en el cálculo integral. Es un procedimiento muy ingenioso.

6.° *Otro procedimiento para calcular*

$$\int e^{ax}\cdot\cos bx\,dx \qquad \text{y} \qquad \int e^{ax}\cdot\operatorname{sen} bx\,dx.$$

Llamemos M a la primera y N a la segunda integral y calculemos $M + jN$:

$$M + jN = \int e^{ax}\cdot\cos bx\,dx + j\int e^{ax}\cdot\operatorname{sen} bx\,dx$$

$$= \int e^{ax}(\cos bx + j\operatorname{sen} bx)\,dx = \int e^{ax}\cdot e^{jbx}\,dx$$

$$= \int e^{(a+jb)x}\,dx = \frac{1}{a+jb}\int e^{(a+jb)x}\cdot(a+jb)\,dx$$

$$= \frac{1}{a+jb}\cdot e^{(a+jb)x} = \frac{(a-jb)}{a^2+b^2}\cdot e^{ax}\cdot e^{jbx}.$$

Reemplacemos e^{jbx} por $(\cos bx + j\operatorname{sen} bx)$:

$$M + jN = \left(\frac{a-jb}{a^2+b^2}\right)e^{ax}(\cos bx + j\operatorname{sen} bx),$$

e identifiquemos

$$\left|\begin{array}{l} M = \dfrac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\cos bx + b\operatorname{sen} bx) + C \\ N = \dfrac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\operatorname{sen} bx - b\cos bx) + C. \end{array}\right.$$

Obteniéndose de esta forma M y N al mismo tiempo.

7° *Calcular* $\quad I = \int \text{arc sen } x\, dx$

Llamemos

$$\text{arc sen } x = u \qquad \text{y} \qquad dx = dv$$

de donde:

$$du = \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} \qquad \text{y} \qquad v = x.$$

Será entonces

$$I = (\text{arc sen } x)x - \int x \cdot \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}$$

$$= x \cdot \text{arc sen } x + \frac{1}{2}\int \frac{-2x\, dx}{\sqrt{1 - x^2}}$$

$$= x \cdot \text{arc sen } x + \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{1 - x^2} + C$$

Igualmente se integraría $\int \text{arc cos } x\, dx$.

8.° *Calcular* $\quad I = \int \text{arc tg } x\, dx.$

Hagamos

$$\text{arc tg } x = u \qquad \text{y} \qquad dx = dv$$

de donde

$$du = \frac{dx}{1 + x^2} \qquad \text{y} \qquad v = x.$$

Será entonces

$$I = (\text{arc tg } x)x - \int x \cdot \frac{dx}{1 + x^2} = x \cdot \text{arc tg } x - \frac{1}{2}\text{Log}\,(1 + x^2) + C.$$

9.° *Calcular* $\quad I = \int e^{\text{arc sen } x}\, dx$

Llamemos

$$e^{\text{arc sen } x} = u \qquad \text{y} \qquad dx = dv$$

de donde

$$du = e^{\text{arc sen } x} \cdot \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} \qquad \text{y} \qquad v = x.$$

Luego

$$I = x \cdot e^{\text{arc sen } x} - \int x \frac{e^{\text{arc sen } x}\, dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

— Hagamos de nuevo

$$e^{\text{arc sen } x} = u \qquad \text{y} \qquad dv = \frac{x\, dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

de donde

$$du = e^{\text{arc sen } x} \cdot \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \text{y} \qquad v = -\sqrt{1-x^2}$$

Por lo que será

$$I = x \cdot e^{\text{arc sen } x} - \left[e^{\text{arc sen } x}(-\sqrt{1-x^2}) - \int -\sqrt{1-x^2} \cdot e^{\text{arc sen } x} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}\right]$$

$$= x \cdot e^{\text{arc sen } x} + \sqrt{1-x^2} \cdot e^{\text{arc sen } x} - I$$

que se puede poner

$$2I = e^{\text{arc sen } x}(x + \sqrt{1-x^2})$$

es decir

$$I = \frac{e^{\text{arc sen } x}}{2}(x + \sqrt{1-x^2}) + C.$$

10. *Calcular* $\quad I = \int \frac{x^2\, dx}{(1+x^2)^2}.$

Hagamos

$$x = u \qquad \text{y} \qquad dv = \frac{x\, dx}{(1+x^2)^2}$$

de donde

$$dx = du \quad \text{y} \quad v = \frac{1}{2}\int \frac{2x\, dx}{(1+x^2)^2} = \frac{1}{2}\int \frac{dz}{z^2} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+x^2}.$$

Se tendrá entonces

$$I = x\left(-\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+x^2}\right) - \int -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+x^2}\, dx$$

$$= -\frac{x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg} x + C.$$

NOTA. — Se calcularía también por partes

$$\int x^3 \operatorname{arc\,tg} x\, dx \qquad \text{o} \qquad \int x \cdot \cos^2 x\, dx$$

$$\int \operatorname{Log} x \cdot dx \qquad \text{o} \qquad \int f(x) \cdot \operatorname{Log} x \cdot dx,$$

siendo $f(x)$ un polinomio de cualquier grado en x.

11. *Calcular* $\quad I = \int \sqrt{x^2 - a^2}\, dx$

Primer procedimiento:
Llamemos

$$\sqrt{x^2 - a^2} = u \qquad \text{y} \qquad dx = dv$$

de donde

$$du = \frac{x\, dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} \qquad \text{y} \qquad v = x.$$

Será

$$I = x\sqrt{x^2 - a^2} - \int \frac{x \cdot x\, dx}{\sqrt{x^2 - a^2}}$$

Restemos y sumemos a^2 al numerador de esta integral:

$$I = x\sqrt{x^2 - a^2} - \int \frac{(x^2 - a^2 + a^2)dx}{\sqrt{x^2 - a^2}}$$

y dividamos en dos esta última integral:

$$I = x\sqrt{x^2 - a^2} - \int \frac{(x^2 - a^2)dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} - a^2 \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}}$$

$$= x\sqrt{x^2 - a^2} - \int \sqrt{x^2 - a^2}\, dx - a^2 \int \frac{\frac{dx}{a}}{\sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1}}$$

$$= x\sqrt{x^2 - a^2} - I - a^2 \cdot \operatorname{Log}\left(\frac{x}{a} + \sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1}\right) + C$$

es decir

$$2I = x\sqrt{x^2 - a^2} - a^2 \operatorname{Log}\left(\frac{x + \sqrt{x^2 - a^2}}{a}\right) + C$$

y finalmente

$$I = \frac{x\sqrt{x^2 - a^2}}{2} - \frac{a^2}{2}\operatorname{Log}\left(\frac{x + \sqrt{x^2 - a^2}}{a}\right) + C.$$

Esta integral nos servirá en las aplicaciones cuando estudiemos las funciones hiperbólicas.

Segundo procedimiento:

$$I = \int \sqrt{x^2 - a^2}\, dx.$$

Conforme a lo visto en la integración por sustitución, se puede poner

$$x = \frac{a}{\operatorname{sen}\varphi} \qquad \text{de donde} \qquad dx = -\frac{a\cos\varphi\, d\varphi}{\operatorname{sen}^2\varphi},$$

lo que da

$$I = \int \sqrt{\frac{a^2}{\operatorname{sen}^2\varphi} - a^2}\left(-\frac{a\cos\varphi\, d\varphi}{\operatorname{sen}^2\varphi}\right)$$

$$= -a^2 \int \sqrt{\frac{1 - \operatorname{sen}^2\varphi}{\operatorname{sen}^2\varphi}} \cdot \frac{\cos\varphi\, d\varphi}{\operatorname{sen}^2\varphi} = -a^2 \int \frac{\cos^2\varphi\, d\varphi}{\operatorname{sen}^3\varphi}$$

$$= -a^2 \int \frac{(1 - \operatorname{sen}^2\varphi)}{\operatorname{sen}^3\varphi}\, d\varphi = -a^2\left[\int \frac{d\varphi}{\operatorname{sen}^3\varphi} - \int \frac{d\varphi}{\operatorname{sen}\varphi}\right].$$

La última de éstas la sabemos integrar; en cuanto a la otra, veremos el procedimiento a utilizar en la integración de las funciones trigonométricas.

12. *Se integraría por partes una expresión de la forma*

$$\int f(x, \operatorname{Log} x)dx.$$

Primer ejemplo: Calcular

$$I = \int \frac{\operatorname{Log} x}{x}\, dx.$$

Pongamos

$$\text{Log } x = u \qquad du = \frac{1}{x}\,dx$$

y

$$\frac{dx}{x} = dv \qquad v = \text{Log } x,$$

de donde queda

$$I = \text{Log } x \cdot \text{Log } x - \int \text{Log } x \frac{dx}{x} = (\text{Log } x)^2 - \text{I}$$

es decir que

$$2\text{I} = (\text{Log } x)^2 \qquad \text{luego} \qquad \text{I} = \frac{1}{2}(\text{Log } x)^2 + \text{C}.$$

Segundo ejemplo: Calcular

$$\int x^2(\text{Log } x)^2 dx.$$

Se integraría dos veces seguidas por partes.

CAPITULO VI

INTEGRALES QUE CONTIENEN

$ax^2 + bx + c$ **o bien** $\sqrt{ax^2 + bx + c}$

20. Integrales del tipo $\int \frac{dx}{ax^2 + bx + c}$

En realidad esta expresión es una fracción racional cuya integración será estudiada en el próximo capítulo por el procedimiento general, cualquiera que sea el tipo de esta fracción racional.

Sin embargo, cuando el denominador es un trinomio de segundo grado, lo cual es bastante frecuente, se puede integrar directamente por el método expuesto a continuación.

Se sabe que, en todos los casos, un trinomio puede reducirse a una diferencia o a una suma de dos cuadrados, por lo que comenzaremos estudiando los dos casos particulares siguientes, a los que puede reducirse un trinomio completo.

Casos particulares: $\int \frac{dx}{K^2 + x^2}$ y $\int \frac{dx}{K^2 - x^2}$

Primer caso. — *Sea calcular* $\int \frac{dx}{K^2 + x^2} = I.$

Tenemos

$$I = \frac{1}{K} \int \frac{\frac{dx}{K}}{1 + \frac{x^2}{K^2}} = \frac{1}{K} \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{K} + C.$$

Segundo caso. — *Sea calcular* $\int \frac{dx}{K^2 - x^2} = I$

podría escribirse

$$x = K \operatorname{sen} \varphi \qquad \text{de donde} \qquad dx = K \cos \varphi \cdot d\varphi$$

lo que da

$$I = \int \frac{K \cos \varphi \, d\varphi}{K^2(1 - \operatorname{sen}^2 \varphi)} = \frac{1}{K} \int \frac{d\varphi}{\cos \varphi} + C$$

que anteriormente ha sido ya integrado, y de cuya integración veremos más adelante el procedimiento normal.

Pero, como se verá después al tratar de la integración de las fracciones racionales, puede escribirse la identidad siguiente, que tiene por objeto dividir la fracción en otras dos más simples:

$$\frac{1}{K^2 - x^2} = \frac{1}{(K + x)(K - x)} \equiv \frac{A}{K + x} + \frac{B}{K - x}$$

donde A y B son coeficientes desconocidos, que se calcula como sigue. Quitando denominadores

$$1 \equiv A(K - x) + B(K + x).$$

Como esta expresión es una identidad, demos a x valores cualesquiera, por ejemplo:

Hagamos

$$x = K, \quad \text{queda} \quad 1 = 2BK, \quad \text{de donde} \quad B = \frac{1}{2K},$$

$$x = -K, \quad \text{queda} \quad 1 = 2AK, \quad \text{de donde} \quad A = \frac{1}{2K}.$$

Se tendrá, pues, dos integrales

$$I = \frac{1}{2K} \int \frac{dx}{K + x} + \frac{1}{2K} \int \frac{dx}{K - x} = \frac{1}{2K} [\operatorname{Log}(K + x) - \operatorname{Log}(K - x)]$$

$$= \frac{1}{2K} \operatorname{Log} \frac{K + x}{K - x} + C.$$

Así, en este caso se encuentra un logaritmo.

Caso general: $$I = \int \frac{dx}{ax^2 + bx + c}$$

Sabemos que este trinomio puede descomponerse en forma canónica, lo que da

$$I = \int \frac{dx}{a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right)\right]}$$

Hagamos

$$x + \frac{b}{2a} = u \qquad \text{y} \qquad \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} = \pm K^2$$

(en efecto, $b^2 - 4ac$ puede ser $\gtrless 0$).

Habrá, pues, tres casos:

1.° $b^2 - 4ac = 0$.

Queda

$$I = \frac{1}{a}\int \frac{du}{u^2} = -\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{u} = -\frac{1}{a\left(x + \frac{b}{2a}\right)} + C.$$

2.° $b^2 - 4ac < 0$. Pondremos $\frac{b^2 - 4ac}{4a^2} = -K^2$.

Queda

$$I = \frac{1}{a}\int \frac{du}{u^2 + K^2} = \frac{1}{aK} \operatorname{arc\,tg} \frac{u}{K} + C.$$

3.° $b^2 - 4ac > 0$. Pondremos $\frac{b^2 - 4ac}{4a^2} = +K^2$

Queda

$$I = \frac{1}{a}\int \frac{du}{u^2 - K^2} = -\frac{1}{a}\int \frac{du}{K^2 - u^2}$$

lo que da

$$= -\frac{1}{2aK} \cdot \operatorname{Log} \frac{K + u}{K - u} + C.$$

Ejemplos:

1.° *Sea calcular* $$I = \int \frac{dx}{x^2 - x + 1}$$

Se tiene

$$I = \int \frac{dx}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1-4}{4}\right)} = \int \frac{dx}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}$$

$$= \int \frac{du}{u^2 + K^2} = \frac{1}{K} \operatorname{arc\,tg} \frac{u}{K}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arc\,tg} \frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C.$$

2.° *Sea calcular* $\quad I = \int \frac{dx}{6x^2 - 5x + 1}.$

Se tiene

$$I = \int \frac{dx}{6\left[\left(x-\frac{5}{12}\right)^2 - \left(\frac{25-24}{144}\right)\right]} = \frac{1}{6} \int \frac{dx}{\left(x-\frac{5}{12}\right)^2 - \left(\frac{1}{12}\right)^2}$$

$$= -\frac{1}{6} \int \frac{du}{K^2 - u^2} = -\frac{1}{12K} \operatorname{Log} \frac{K+u}{K-u} = -1 \cdot \operatorname{Log} \frac{\frac{1}{12} + \left(x-\frac{5}{12}\right)}{\frac{1}{12} - \left(x-\frac{5}{12}\right)}$$

$$= -\operatorname{Log} \frac{-4+12x}{6-12x} = \operatorname{Log} \left(\frac{-2+6x}{3-6x}\right)^{-1} = \operatorname{Log} \frac{3-6x}{-2+6x} + C.$$

21. Integral del tipo $\int \frac{px+r}{ax^2+bx+c}\,dx.$

Hagamos $ax^2 + bx + c = u$, luego $du = 2ax\,dx + b\,dx$, de donde se deduce

$$x\,dx = \frac{du - b\,dx}{2a} = \frac{du}{2a} - \frac{b\,dx}{2a},$$

y se tendrá, pues

$$I = \int \frac{p\left(\frac{du}{2a} - \frac{b\,dx}{2a}\right) + r\,dx}{u}$$

$$= \frac{p}{2a} \int \frac{du}{u} + \left(r - \frac{pb}{2a}\right) \int \frac{dx}{ax^2 + bx + c} + C.$$

La primera da Log u y la segunda es del tipo que acabamos de estudiar. Se ve que la primera integral se expresa con u y la segunda con x, debiendo tomarse la precaución de no mezclar la u y la x.

Ejemplo. — Sea calcular: $\quad I = \int \frac{(2x-3)dx}{-5x^2+2x+1}$

Hagamos

$-5x^2+2x+1=u \qquad$ de donde $\qquad du=-10x\,dx+2dx,$

se deduce

$$x\,dx=\frac{2dx-du}{10},$$

luego será

$$I=\int \frac{2\left(\frac{2dx-du}{10}\right)-3dx}{u}=-\frac{1}{5}\int\frac{du}{u}+\left(\frac{4}{10}-3\right)\int\frac{dx}{-5x^2+2x+1}$$

$$=-\frac{1}{5}\operatorname{Log}(-5x^2+2x+1)-2{,}6\int\frac{dx}{-5\left[\left(x-\frac{2}{10}\right)^2-\left(\frac{4+20}{100}\right)\right]}$$

$$=-\frac{1}{5}\operatorname{Log}(-5x^2+2x+1)+\frac{2{,}6}{5}\int\frac{dx}{\left(x-\frac{1}{5}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{24}}{10}\right)}$$

esta última integral es de la forma $\int\frac{dz}{z^2-K^2}$ o bien $-\int\frac{dz}{K^2-z^2}$, la cual dará $-\frac{1}{2K}\operatorname{Log}\frac{K+z}{K-z}$. Se tendrá finalmente

$$I=\operatorname{Log}\frac{1}{(-5x^2+2x+1)^{1/5}}-\frac{2{,}6}{5}\cdot\frac{10}{2\cdot\sqrt{24}}\operatorname{Log}\frac{\frac{\sqrt{24}}{10}+\left(x-\frac{1}{5}\right)}{\frac{\sqrt{24}}{10}-\left(x-\frac{1}{5}\right)}$$

$$=\operatorname{Log}\frac{1}{(-5x^2+2x+1)^{1/5}}-\frac{2{,}6}{\sqrt{24}}\operatorname{Log}\frac{\sqrt{24}-2+10x}{\sqrt{24}+2-10x}+C.$$

22. Integrales del tipo $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}$

El trinomio se descompondrá también en forma canónica, lo que dará una suma o una diferencia de dos cuadrados. Desembocaremos de esta forma en los tres casos siguientes:

Casos particulares:

1.° $$\int \frac{du}{\sqrt{K^2 - u^2}} = \operatorname{arc\,sen} \frac{u}{K} + C$$

2.° $$\int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm K^2}} \quad \text{o bien} \quad \left(\int \frac{\frac{du}{K}}{\sqrt{\frac{u^2}{K^2} \pm 1}} \right)$$

que hemos resuelto ya, pero que lo haremos algunas páginas más adelante por otro procedimiento.

Se halla

$$I = \operatorname{Log}\left(\frac{u}{K} + \sqrt{\frac{u^2}{K^2} \pm 1}\right) = \operatorname{Log}\left(\frac{u + \sqrt{u^2 \pm K^2}}{K}\right) + C$$

$$= \operatorname{Log}(u + \sqrt{u^2 \pm K^2}) - \operatorname{Log} K + C = \operatorname{Log}(u + \sqrt{u^2 \pm K^2}) + C'.$$

3.° $$\int \frac{du}{\sqrt{(u + K)^2}} = \int \frac{du}{u + K} = \operatorname{Log}(u + K).$$

Caso general. $$I = \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}.$$

Se tendrá

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt{a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right)\right]}}$$

Hay dos casos, según que a sea positivo o negativo.

Primer caso: $a < 0$.

Es preciso que la cantidad entre corchetes sea negativa (si no,

la integral es imaginaria): este trinomio será negativo entre las raíces, y $b^2 - 4ac$ deberá ser mayor que 0. Escribamos

$$\frac{b^2 - 4ac}{4a^2} = K^2$$

lo que da, siendo a negativo:

$$I = \frac{1}{\sqrt{|a|}} \int \frac{dx}{\sqrt{-\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - K^2\right]}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \int \frac{du}{\sqrt{K^2 - u^2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{|a|}} \operatorname{arc\,sen} \left(\frac{x + \frac{b}{2a}}{K} \right).$$

Segundo caso: $a > 0$. Escribamos

$\frac{b^2 - 4ac}{4a^2} = \pm K^2$ (según el signo de $b^2 - 4ac$) y $u = x + \frac{b}{2a}$, lo que da

$$I = \frac{1}{\sqrt{a}} \int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm K^2}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \operatorname{Log} (u + \sqrt{u^2 \pm K^2}) + C.$$

Ejemplos:

1.° *Calcular* $I = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + x - 2}}$

Se tendrá

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1 + 4 \cdot 2}{4}\right)}} = \int \frac{dx}{\sqrt{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}}}$$

$$= \int \frac{du}{\sqrt{u^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2}} = \operatorname{Log} \left[x + \frac{1}{2} + \sqrt{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}} \right] + C.$$

2.° *Calcular* $I = \int \frac{dx}{\sqrt{-4x^2 + 2x + 1}}$

Se tendrá

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt{-4\left[\left(x-\frac{2}{8}\right)^2-\left(\frac{4+16}{64}\right)\right]}} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{-\left[\left(x-\frac{2}{4}\right)^2-\frac{20}{64}\right]}}$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{du}{\sqrt{K^2-u^2}} = \frac{1}{2}\operatorname{arc\,sen}\frac{u}{K}$$

$$= \frac{1}{2}\operatorname{arc\,sen}\frac{x-\frac{1}{4}}{\frac{\sqrt{20}}{8}} = \frac{1}{2}\operatorname{arc\,sen}\left(\frac{8x-2}{\sqrt{20}}\right) + C.$$

23. Integral de la forma $\int \frac{(px+r)dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$.

Se pone

$$u = ax^2 + bx + c \qquad \text{de donde} \qquad du = 2ax\,dx + b\,dx,$$

deduciéndose

$$x\,dx = \frac{du - b\,dx}{2a},$$

por lo que se tendrá

$$I = \int \frac{p\left(\frac{du-b\,dx}{2a}\right)+r dx}{\sqrt{u}} = \frac{p}{2a}\int \frac{du}{\sqrt{u}} + \left(r-\frac{pb}{2a}\right)\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

se llega a dos integrales que sabemos calcular.

24. Integrales de la forma $\int \sqrt{ax^2+bx+c}\,dx$

Descomponiendo este trinomio en la forma canónica, se podrá siempre poner en forma de una diferencia o de una suma de dos cuadrados.

1er caso. — $\int \sqrt{K^2-u^2}\,du.$

Primer procedimiento. — Ponemos

$$u = K \operatorname{sen}\varphi$$

luego

$$du = K\cos\varphi\,d\varphi,$$

lo que da

$$I = \int \sqrt{K^2(1 - \operatorname{sen}^2 \varphi)} \cdot K \cos \varphi \, d\varphi = K^2 \int \cos^2 \varphi \, d\varphi$$

lo cual se sabe integrar. Una vez finalizada la integral, volveremos a x reemplazando:

$$\varphi \text{ por } \operatorname{arc\,sen} \frac{u}{K}, \quad \operatorname{sen} \varphi \text{ por } \frac{u}{K}, \quad \text{y} \quad \cos \varphi \text{ por } \sqrt{1 - \frac{u^2}{K^2}}.$$

Segundo procedimiento. — Se escribe

$$\int \sqrt{K^2 - u^2}\, du = \int \frac{(K^2 - u^2)du}{\sqrt{K^2 - u^2}}$$

o sea

$$I = K^2 \int \frac{du}{\sqrt{K^2 - u^2}} - \int \frac{u^2 du}{\sqrt{K^2 - u^2}}$$

$$I = K^2 \operatorname{arc\,sen} \frac{u}{K} + \frac{1}{2} \int u \cdot \frac{(-2u\, du)}{\sqrt{K^2 - u^2}}$$

Integremos esta última por partes, poniendo $dv = \dfrac{-2u\, du}{\sqrt{K^2 - u^2}}$

de donde $v = 2\sqrt{K^2 - u^2}$, lo que da

$$I = K^2 \operatorname{arc\,sen} \frac{u}{K} + \frac{1}{2} \left[u \cdot 2\sqrt{K^2 - u^2} - \int 2\sqrt{K^2 - u^2} \cdot du \right]$$

$$I = K^2 \operatorname{arc\,sen} \frac{u}{K} + u\sqrt{K^2 - u^2} - I$$

es decir

$$2I = K^2 \operatorname{arc\,sen} \frac{u}{K} + u\sqrt{K^2 - u^2}$$

y, dividiendo por 2, se obtiene I.

2.º **caso.** — $\int \sqrt{u^2 \pm K^2}\, du.$

Escribiremos como anteriormente

$$I = \int \frac{u^2 \pm K^2}{\sqrt{u^2 \pm K^2}}\, du = \int \frac{u^2 du}{\sqrt{u^2 \pm K^2}} \pm K^2 \int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm K^2}}$$

$$I = \frac{1}{2}\int u \cdot \frac{2u\, du}{\sqrt{u^2 \pm K^2}} \pm K^2 \cdot \text{Log}\,(u + \sqrt{u^2 \pm K^2}) + C$$

que se integra también por partes, como acabamos de hacer en el primer caso $\left(\text{con } dv = \frac{2u\, du}{\sqrt{u^2 \pm K^2}} \text{ y } v = 2\sqrt{u^2 \pm K^2}\right)$:

$$I = \frac{1}{2}\left[u \cdot 2\sqrt{u^2 \pm K^2} - \int 2\sqrt{u^2 \pm K^2}\, du\right] \pm K^2 \cdot \text{Log}\,(u + \sqrt{u^2 \pm K^2}) + C$$

$$= u\sqrt{u^2 \pm K^2} - I \pm K^2 \cdot \text{Log}\,(u + \sqrt{u^2 \pm K^2}) + C$$

que queda

$$2I = u\sqrt{u^2 \pm K^2} \cdot \text{Log}\,(u + \sqrt{u^2 \pm K^2}) + C$$

de donde se saca I.

Ejemplo. — *Sea calcular* $\int \sqrt{2x^2 + x + 10}\, dx$.

Se tiene

$$I = \int \sqrt{2\left[\left(x + \frac{1}{4}\right)^2 - \left(\frac{1 - 80}{16}\right)\right]}\, dx = \sqrt{2}\int \sqrt{\left(x + \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{79}{16}}\, dx$$

$$= \sqrt{2}\int \sqrt{u^2 + K^2} \cdot du$$

de donde

$$I = \sqrt{2}\left[\frac{u}{2}\sqrt{u^2 + K^2} + \frac{K^2}{2} \cdot \text{Log}\,(u + \sqrt{u^2 + K^2})\right] + C$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(x + \frac{1}{4}\right)\sqrt{\left(x + \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{79}{16}}$$

$$+ \frac{79\sqrt{2}}{32} \cdot \text{Log}\left[x + \frac{1}{4} + \sqrt{\left(x + \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{79}{16}}\right] + C.$$

NOTA. — No olvidar que, en estas integrales, se puede también utilizar sustituciones trigonométricas, poniendo

$$u = \mathrm{K}\,\mathrm{tg}\,\varphi \quad \text{cuando se tiene} \quad \sqrt{\mathrm{K}^2 + u^2}$$

o bien

$$u = \frac{\mathrm{K}}{\operatorname{sen}\varphi} \quad \text{cuando se tiene} \quad \sqrt{u^2 - \mathrm{K}^2}$$

como se ha visto en el capítulo II, pero se llega en general a integrales trigonométricas, más o menos complicadas, que estudiaremos más adelante.

Examinaremos igualmente otro procedimiento mediante las líneas hiperbólicas.

25. Otro procedimiento para calcular

$$\int \sqrt{ax^2 + bx + c}\,dx \qquad \text{o bien} \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}$$

Primer caso: $a > 0$.

Ponemos

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = x\sqrt{a} + z,$$

se eleva al cuadrado, se deduce x y dx y la integral se simplifica siempre.

Ejemplos. — 1.° Sea calcular $\displaystyle\int \frac{du}{\sqrt{u^2 + \mathrm{K}^2}}$.

Hagamos

$$\sqrt{u^2 + \mathrm{K}^2} = u + z$$

es decir

$$u^2 + \mathrm{K}^2 = u^2 + z^2 + 2uz$$
$$2uz = \mathrm{K}^2 - z^2$$

luego

$$u = \frac{\mathrm{K}^2 - z^2}{2z} = \frac{\mathrm{K}^2}{2z} - \frac{z}{2}$$

y

$$du = \left(-\frac{\mathrm{K}^2}{2z^2} - \frac{1}{2}\right)dz.$$

De donde se deduce

$$\sqrt{u^2 + K^2} = u + z = \left(\frac{K^2}{2z} - \frac{z}{2}\right) + z = \frac{K^2}{2z} + \frac{z}{2}.$$

La integral queda

$$I = -\int \frac{\left(\frac{K^2}{2z^2} + \frac{1}{2}\right)dz}{\frac{K^2}{2z} + \frac{z}{2}} = -\int \frac{\left(\frac{K^2}{2z^2} + \frac{1}{2}\right)dz}{\frac{K^2}{2z^2} + \frac{1}{2}} = -\int \frac{dz}{z}$$

$$= -\operatorname{Log} z = \operatorname{Log} \frac{1}{z} = \operatorname{Log}\left(\frac{1}{\sqrt{u^2 + K^2} - u}\right).$$

Multipliquemos arriba y abajo por la cantidad conjugada del denominador, quedando

$$I = \operatorname{Log}\left(\frac{\sqrt{u^2 + K^2} + u}{K^2}\right) = \operatorname{Log}(u + \sqrt{u^2 + K^2}) - \operatorname{Log} K^2 + C$$

ahora bien, Log K^2 es una constante que se añade a C, lo que da finalmente un resultado que ya hemos encontrado por otro método:

$$\boxed{\int \frac{du}{\sqrt{u^2 + K^2}} = \operatorname{Log}(u + \sqrt{u^2 + K^2}) + C}$$

El mismo procedimiento daría

$$\boxed{\int \frac{du}{\sqrt{u^2 - K^2}} = \operatorname{Log}(u + \sqrt{u^2 - K^2}) + C}$$

Segundo ejemplo. — Sea calcular $\int \sqrt{u^2 + K^2}\, au.$

Hagamos

$$\sqrt{u^2 + K^2} = u + z$$
$$u^2 + K^2 = u^2 + z^2 + 2uz$$

despejando u:

$$u = \frac{K^2 - z^2}{2z} = \frac{K^2}{2z} - \frac{z}{2}$$

luego

$$du = \left(-\frac{K^2}{2z^2} - \frac{1}{2}\right) dz$$

será, pues:

$$u + z = \left(\frac{K^2}{2z} - \frac{z}{2}\right) + z = \frac{K^2}{2z} + \frac{z}{2}$$

En resumen, será

$$I = \int (u + z) \left(-\frac{K^2}{2z^2} - \frac{1}{2}\right) dz$$

$$= -\int \left(\frac{K^2}{2z} + \frac{z}{2}\right) \left(\frac{K^2}{2z^2} + \frac{1}{2}\right) dz$$

$$= -\int \frac{K^4 dz}{4z^3} - \int \frac{K^2 dz}{4z} - \int \frac{K^2 dz}{4z} - \int \frac{z\, dz}{4}.$$

Se obtiene así integrales de potencia de fácil cálculo; a continuación se reemplazaría z por $\sqrt{u^2 + K^2} - u$.

Tercer ejemplo. — Sea calcular

$$I = \int \sqrt{4x^2 - 2x + 1}\, dx.$$

Se tiene

$$I = \int \sqrt{4\left[\left(x - \frac{2}{8}\right)^2 - \left(\frac{4 - 16}{64}\right)\right]}\, dx = 2\int \sqrt{\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{12}{64}}\, dx$$

Hagamos

$$\sqrt{\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{12}{64}} = \left(x - \frac{1}{4}\right) + z$$

de donde, elevando al cuadrado

$$\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{12}{64} = \left(x - \frac{1}{4}\right)^2 + z^2 + 2z\left(x - \frac{1}{4}\right),$$

se deduce

$$2z\left(x - \frac{1}{4}\right) = \frac{3}{16} - z^2$$

$$x - \frac{1}{4} = \frac{3}{32z} - \frac{z}{2}$$

luego diferenciando

$$dx = \left(-\frac{3}{32z^2} - \frac{1}{2}\right)dz$$

con

$$\left(x - \frac{1}{4}\right) + z = \left(\frac{3}{32z} - \frac{z}{2}\right) + z = \frac{3}{32z} + \frac{z}{2}.$$

La integral queda

$$I = -2\int \left(\frac{3}{32z} + \frac{z}{2}\right)\left(\frac{3}{32z} + \frac{1}{2}\right)dz$$

$$= 2\left[-\int \frac{9dz}{32^2z^3} - \int \frac{3dz}{64z} - \int \frac{3dz}{64z} - \int \frac{z\,dz}{4}\right]$$

$$= 2\left[-\frac{9}{32^2}\left(-\frac{1}{2z^2}\right) - \frac{6}{64}\operatorname{Log} z - \frac{1}{4}\cdot\frac{z^2}{2}\right]$$

$$= \frac{9}{32^2z^2} - \frac{3}{16}\operatorname{Log} z - \frac{1}{4}z^2.$$

Basta con reemplazar z por $\sqrt{\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{3}{16}} - \left(x - \frac{1}{4}\right)$.

Segundo caso: $a < 0$.

Se pone

$$\sqrt{-ax^2 + bx + c} = \sqrt{c} + z \cdot x$$

se eleva al cuadrado (c desaparece), se saca x, se calcula dx y se llega a una fracción racional complicada. Los cálculos son largos y complicados, por lo que no insistiremos.

26. Aplicación eléctrica: Cálculo de la capacidad eléctrica de un hilo rectilíneo cargado.

Sea un hilo metálico rectilíneo de longitud l, cargado de electricidad. Llamemos δ a la densidad eléctrica superficial supuesta uniforme (fig. 17). Situémonos a la distancia x del centro O, y demos a x un pequeño incremento dx. El anillo de espesor dx posee una carga eléctrica superficial

$$dq = \delta \cdot dS = \delta \cdot 2\pi R \cdot dx$$

y el potencial dV en O debido a esta carga (puesto que todos los puntos de este anillo están a la misma distancia r del centro O):

$$dV = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{r} \qquad \left(\varepsilon_0 = \frac{1}{4\pi \times 9 \times 10^9}\right)$$

Integrando, se tendrá el potencial total V, siendo la capacidad del hilo:

$$C = \frac{Q}{V}$$

Se tiene, pues

$$dV = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2\pi R\,\delta\,dx}{r} = \frac{1}{2\varepsilon_0}\frac{R\,\delta\,dx}{\sqrt{x^2 + R^2}}$$

de donde, integrando

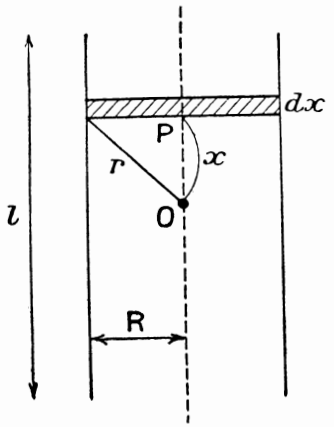


FIG. 17

$$V = \int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} \frac{1}{2\varepsilon_0}\frac{R\,\delta\,dx}{\sqrt{x^2 + R^2}} \qquad \text{o bien} \qquad \frac{1}{\varepsilon_0} R\delta \int_0^{\frac{l}{2}} \frac{dx}{\sqrt{x^2 + R^2}}$$

$$= \frac{1}{\varepsilon_0} R\,\delta \left[\text{Log}\left(\frac{x}{R} + \sqrt{\frac{x^2}{R^2} + 1}\right)\right]_0^{\frac{l}{2}}$$

$$= \frac{1}{\varepsilon_0} R\,\delta \left[\text{Log}\left(\frac{l}{2R} + \sqrt{\frac{l^2}{4R^2} + 1}\right) - \text{Log}\,1\right]$$

$$= \frac{1}{\varepsilon_0} R\,\delta \cdot \text{Log}\left(\frac{l}{2R} + \sqrt{\frac{l^2}{4R^2} + 1}\right).$$

Si se llama c a la capacidad por *metro* de longitud de hilo, la capacidad total será

$$C = c \cdot l$$

y la fórmula fundamental da

$$Q = C \cdot V = clV$$

de donde la capacidad por metro será

$$c = \frac{Q}{Vl}.$$

Ahora bien, la carga total Q es igual a la superficie lateral del hilo multiplicada por la densidad superficial δ:

$$Q = 2\pi R l \cdot \delta.$$

Se tendrá pues

$$c = \frac{2\pi\, R l\, \delta}{l \cdot \frac{1}{\varepsilon_0} R\, \delta \operatorname{Log}\left(\frac{l}{2R} + \sqrt{\frac{l^2}{4R^2} + 1}\right)} = \frac{2\pi\varepsilon_0}{\operatorname{Log}\left(\frac{l}{2R} + \sqrt{\frac{l^2}{4R^2} + 1}\right)}$$

Pero, en la práctica, $R \ll l$, pudiéndose despreciar 1 ante $\frac{l^2}{4R^2}$, por por lo que queda

$$c = \frac{2\pi\varepsilon_0}{\operatorname{Log}\left(\frac{l}{2R} + \frac{l}{2R}\right)} = \frac{2\pi\varepsilon_0}{\operatorname{Log}\frac{l}{R}},$$

expresado c en faradios por metro.

Para un hilo paralelo al suelo, llamando h a la altura por encima del suelo (con $h \gg R$), se hallaría

$$c = \frac{2\pi\varepsilon_0}{\operatorname{Log}\frac{2h}{R}}$$

y para dos hilos paralelos indefinidos, llamando d a la distancia entre ellos, sería

$$c = \frac{\pi\varepsilon_0}{\operatorname{Log}\frac{d}{R}}.$$

En telegrafía, para un hilo paralelo al suelo, se toma una media de $\frac{6}{1.000}$ microfaradios por km.

27. Integrales de la forma

$$\int \frac{x^m dx}{\sqrt{ax + b}} \quad \text{o bien} \quad \int x^m \sqrt{ax + b}\, dx.$$

Se integra por sustitución, poniendo

$$ax + b = u^2 \quad \text{de donde} \quad a\, dx = 2u\, du,$$

lo que hace desaparecer el radical.

Primer ejemplo. — Calcular $\int \sqrt{ax+b}\,dx$.

Se tendrá

$$I = \int \sqrt{u^2} \cdot \frac{2u\,du}{a} = \frac{2}{a}\int u^2\,du = \frac{2}{a}\cdot\frac{u^3}{3} + C.$$

Segundo ejemplo. — Calcular $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{2x+1}}$.

Hagamos

$$2x + 1 = u^2 \qquad \text{de donde} \qquad 2dx = 2u\,du.$$

y la integral queda

$$I = \int \frac{\left(\frac{u^2-1}{2}\right)^2 \cdot u\,du}{\sqrt{u^2}} = \int \left(\frac{u^2-1}{2}\right)^2 du$$

$$= \frac{1}{4}\int (u^4 - 2u^2 + 1)du = \frac{1}{4}\left[\frac{u^5}{5} - \frac{2}{3}u^3 + u\right] + C,$$

bastando con reemplazar u por su valor $\sqrt{2x+1}$.

CAPITULO VII

INTEGRALES DE LAS FRACCIONES RACIONALES

28. Procedimiento simple y rápido para dividir un polinomio por otro. — Una fracción racional está formada por el cociente de dos polinomios de cualquier grado o por la inversa de un polinomio. Es preciso que no se encuentre ninguna raíz (cuadrada, cúbica u otra).

Es el caso, por ejemplo, de las integrales siguientes:

$$\int \frac{x^4 - 3x^3 - 1}{2x^2 + 3x + 1}\,dx, \quad \int \frac{(2x+1)dx}{5x^2 - 3}, \quad \int \frac{dx}{4x^4 - 2x^2 + 1}, \text{ etc.}$$

Si el grado del numerador es superior al del denominador, se hará la división por el procedimiento que vamos a indicar. Así, por ejemplo, se tendría

$$\frac{x^4 + 3x^3 - 6}{x^2 + 2x + 1} = (x^2 + x - 3) + \frac{5x - 3}{x^2 + 2x + 1}$$

La parte entera será fácil de integrar, *no quedando por integrar más que una fracción cuyo numerador es en un grado inferior al del denominador*. Vamos a estudiar el método general para integrar una fracción de este tipo (si bien ya hemos visto un método especial en el caso en que el denominador es un trinomio de segundo grado): se descompondrá esta fracción en elementos simples, de la forma $\frac{A}{x-a}$ o bien $\frac{A}{(x-a)^m}$, fáciles de integrar.

Cuando el grado del numerador es *superior* al del denominador, se hace la división empleando el *método de los coeficientes indeterminados* (análogo al empleado para establecer la fórmula de MacLaurin).

— Este método está basado en el principio de la división.

Sea dividir 10 por 7; se tendrá

$$\frac{10}{7} = 1 + \frac{3}{7} = \text{Cociente} + \frac{\text{Resto}}{\text{Denominador}}$$

Análogamente, sea dividir x^5 por x^3; se tendrá

$$\frac{x^5}{x^3} = x^2$$

aquí la división es exacta.

Se puede entonces generalizar y escribir para la división de dos polinomios:

$$\frac{N}{D} = \text{Cociente} + \frac{\text{Resto}}{D}.$$

—*¿Cuáles serán ahora los grados del cociente y del resto?*

Según los principios de la división y las reglas de cálculo de los exponentes, el grado del cociente será igual a la *diferencia de los grados del numerador y del denominador*. Así, si N es de cuarto grado y D de tercero, el cociente será de grado $4 - 3 = 1$, y, por tanto de la forma $ax + b$.

En cuanto al grado del *resto*, será, evidentemente, de un grado una unidad inferior al del denominador, *pues, si fuera del mismo grado, la división se podría continuar*. Así, si D es de tercer grado, el resto será de segundo grado completo, de la forma $ax^2 + bx + c$.

— En cuanto a los coeficientes a, b, c, etc., son desconocidos, pero vamos a ver cómo se pueden calcular.

— Así, por ejemplo, se tendría

$$\frac{x^2 + x^2 + 2x}{2x^2} \equiv \left(\frac{x}{2} + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{x}$$

análogamente

$$\frac{x^4 - 1}{x + 1} \equiv (ax^3 + bx^2 + cx + d) + \frac{K}{x + 1},$$

de la misma forma

$$\frac{3x^2 - 2x^2 + 1}{4x^2 - 2x - 5} \equiv (ax + b) + \frac{mx + p}{4x^2 - 2x - 5},$$

y el gran ingenio del método consiste justamente en calcular estos coeficientes indeterminados.

Basta para ello con eliminar el denominador e identificar los dos miembros, es decir, igualar los coeficientes de las mismas potencias de x, puesto que se tiene una identidad.

Recordemos primeramente qué es lo que distingue una igualdad de una identidad:

$x - 4 = 2$ es una *igualdad, que solo* se verifica para $x = 6$;

$(x - 4)^2 = x^2 - 8x + 16$ es una *identidad,* que, no solamente se verifica para $x = 6$, sino para cualquier valor de x, puesto que el miembro de la derecha es el miembro de la izquierda transformado.

Por eso en una identidad se ponen tres barras:

$$(a + b)^2 \equiv a^2 + 2ab + b^2$$
$$(x - 4)^2 \equiv x^2 - 8x + 16.$$

Para la identificación nos basamos en el teorema siguiente.

Teorema. — *Cuando dos polinomios son idénticos, son del mismo grado, y los coeficientes de las mismas potencias de x son iguales.*

Sean, en efecto, los dos polinomios siguientes, que, por hipótesis, son idénticos:

$$f(x) = Ax^m + Bx^{m-1} + \ldots + Fx^p + Gx^{p-1} \ldots + M$$

y

$$\varphi(x) = ax^p + bx^{p-1} + \ldots + n$$

con $m > p$, por ejemplo.

Puesto que, por hipótesis, $f(x) \equiv \varphi(x)$, escribamos que su diferencia es nula

$$f(x) - \varphi(x) = 0,$$

es decir

$$Ax^m + Bx^{m-1} + \ldots + (F - a)x^p + (G - b)x^{p-1} + \ldots + (M - n) \equiv 0$$

lo que exige que se tenga a la vez

$$A = 0, \quad B = 0, \ldots F = a, \quad G = b, \quad M = n.$$

En efecto, se sabe que un polinomio es idénticamente nulo cuando todos sus coeficientes son nulos. Por otra parte, como debe ser nulo para cualquier valor de x, deberá serlo en particular para $x = 0$.

Una vez demostrado el teorema, apliquémosle a algunos ejemplos.

Ejemplos:

1.° *Sea efectuar*

$$\frac{x^2 - x + 1}{x - 3} = \text{Cociente} + \frac{\text{Resto}}{x - 3}.$$

Se tendrá

$$\frac{x^2 - x + 1}{x - 3} \equiv ax + b + \frac{K}{x - 3}$$

es decir

$$x^2 - x + 1 \equiv (ax + b)(x - 3) + K.$$

Identifiquemos (es decir, igualemos los coeficientes de las potencias iguales de x):

para los x^2	$1 = a$		
para los x	$-1 = b - 3a$	de donde	$b = -1 + 3a = +2$
para los términos constantes	$+1 = -3b + K$	de donde	$K = 1 + 3b = +7,$

luego

$$\frac{x^2 - x + 1}{x - 3} \equiv (x + 2) + \frac{7}{x - 3}.$$

2.° *Sea dividir*

$$\frac{x^4 - 1}{x - 1}.$$

Se escribirá

$$\frac{x^4 - 1}{x - 1} \equiv ax^3 + bx^2 + cx + d + \frac{K}{x - 1}$$

$$x^4 - 1 \equiv (ax^3 + bx^2 + cx + d)(x - 1) + K,$$

de donde identificando:

para los x^4	$1 = a$		
para los x^3	$0 = b - a$	de donde	$b = a = 1$
para los x^2	$0 = c - b$	de donde	$c = b = 1$
para los x	$0 = d - c$	de donde	$d = c = 1$
para los términos constantes	$-1 = -d + K$	de donde	$K = -1 + d = 0,$

de esta forma, se obtiene una división exacta:

$$\frac{x^4 - 1}{x - 1} \equiv x^3 + x^2 + x + 1.$$

Esto es general; se sabe, en efecto, que $x^m - a^m$ es divisible exactamente por $x - a$, para m entero y positivo.

3.° *Sea calcular*

$$\frac{2x^4}{x^2 + 3x + 1}$$

Se escribirá

$$\frac{2x^4}{x^2 + 3x + 1} \equiv (ax^2 + bx + c) + \frac{mx + p}{x^2 + 3x + 1}$$

o sea

$$2x^4 \equiv (ax^2 + bx + c)(x^2 + 3x + 1) + mx + p,$$

identifiquemos

para los x^4	$2 = a$		
para los x^3	$0 = 3a + b$	de donde	$b = -3a = -6$
para los x^2	$0 = a + c + 3b$	de donde	$c = -a - 3b = +16$
para los x	$0 = 3c + b + m$	de donde	$m = -3c - b = -42$
para los términos constantes	$0 = c + p$	de donde	$p = -c = -16.$

Se tendrá pues:

$$\frac{2x^4}{x^2 + 3x + 1} \equiv 2x^2 - 6x + 16 + \left(\frac{-42x - 16}{x^2 + 3x + 1}\right).$$

29. Descomposición de un polinomio en producto de factores. — Antes de descomponer nuestra última fracción en elementos más simples, fáciles de integrar, es preciso transformar este denominador en producto de varios factores.

Para ello no existe método general, sino solamente procedimientos particulares. Estudiemos tres de ellos:

Primer medio. — Por reducción a una diferencia de dos cuadrados.

Por ejemplo

$$a^2 - b^2 \equiv (a + b)(a - b).$$

Así

$$x^4 + x^2 + 1 \equiv (x^2 + 1)^2 - x^2 \equiv (x^2 + 1 + x)(x^2 + 1 - x).$$

Es éste un procedimiento de tanteo.

Segundo medio. — Por resolución de una ecuación.

Así, $x^4 - 5x^2 - 36$ tiene como raíces $x^2 = 9$ y $x^2 = -4$. Se podrá, pues, escribir [puesto que $ax^2 + bx + c \equiv a(x - x')(x - x'')$]:

$$x^4 - 5x^2 - 36 \equiv (x^2 - 9)(x^2 + 4) \equiv (x + 3)(x - 3)(x^2 + 4), \text{ etc.}$$

Tercer medio. — Aplicando las propiedades de la divisibilidad.

Se sabe, en efecto, que si a es una raíz de una ecuación, ésta es divisible por $x - a$.

Así, la ecuación $x^3 - 2x + 1$ tiene como raíz $x = +1$, por lo cual dicha ecuación es divisible exactamente por $x - 1$:

$$\frac{x^3 - 2x + 1}{x - 1} \equiv ax^2 + bx + c = x^2 + x - 1$$

ahora bien, esta última ecuación tiene dos raíces:

$$\frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \quad \text{y} \quad \frac{-1 - \sqrt{5}}{2},$$

por lo cual se podrá escribir

$$x^3 - 2x + 1 \equiv (x - 1)\left(x + \frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)\left(x + \frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)$$

siendo así la suma transformada en producto.

30. Descomposición de una fracción racional en elementos simples. — El modo de descomposición de una fracción en otras varias, más simples y fáciles de integrar, depende de la naturaleza y del número de raíces del denominador.

Lo primero que hay que hacer es poner el denominador en forma de un producto de factores, aplicando las reglas precedentes. Por ejemplo, se escribirá

$$\int \frac{(2x + 1)dx}{x^2 - 5x + 6} = \int \frac{(2x + 1)dx}{(x - 2)(x - 3)}$$

$$\int \frac{(1 - 3x^2)dx}{x^3 - 4x} = \int \frac{(1 - 3x^2)dx}{x(x^2 - 4)} = \int \frac{(1 - 3x^2)dx}{x(x + 2)(x - 2)} \text{ etc.}$$

— Hay cuatro casos según *la naturaleza* de estos factores:

1.° factores de primer grado no repetidos (caso superior);

2.° factores de primer grado repetidos n veces, por ejemplo

$$\int \frac{dx}{(2x-1)^3};$$

3.° factores de segundo grado no repetidos, o mezclados con factores de primer grado no repetidos, por ejemplo

$$\int \frac{dx}{x(x^2+4)};$$

4.° factores de segundo grado repetidos n veces, por ejemplo

$$\int \frac{dx}{(3x^2+1)^4}.$$

31. Primer caso. — Factores de primer grado no repetidos. — Se emplea también el método de los coeficientes indeterminados, habiendo tantas fracciones como factores hay en el denominador (siendo los numeradores de grado $1-1=0$, es decir, constantes A, B, C, etc.).

Así, se escribirá:

$$\frac{Mx+N}{(x-a)(x-b)} \equiv \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b}$$

de donde

$$Mx + N \equiv A(x-b) + B(x-a).$$

En lugar de identificar, se puede dar a x valores simples que faciliten los cálculos:
para $x = a$, se tiene

$$Ma + N = A(a-b) \qquad \text{de donde} \qquad A = \frac{Ma+N}{a-b}$$

para $x = b$, se tiene

$$Mb + N = B(b-a) \qquad \text{de donde} \qquad B = \frac{Mb+N}{b-a}$$

y se tendrá

$$\int \frac{(Mx+N)dx}{(x-a)(x-b)} \equiv \frac{Ma+N}{a-b}\int \frac{dx}{x-a} + \frac{Mb+N}{b-a}\int \frac{dx}{x-b},$$

de fácil integración.

NOTA. — Este método es muy ventajoso cuando el denominador es un trinomio que tiene dos raíces reales.

Ejemplo: Sea calcular $\int \frac{(2x+3)dx}{x^2-5x+6}$

Como el denominador tiene dos raíces reales, 2 y 3, se escribirá

$$\frac{2x+3}{x^2-5x+6} = \frac{2x+3}{(x-2)(x-3)} \equiv \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-3}$$

o sea

$$2x + 3 \equiv A(x-3) + B(x-2). \qquad (1)$$

Hay dos maneras de calcular A y B: una, como se ha hecho anteriormente, dando a x valores cualesquiera, de preferencia valores que anulen a uno de los factores (ya que, siendo una identidad, se puede reemplazar x por cualquier valor), y otra identificando. Según el caso, se toma uno u otro método.

— Tomemos el primer método:

para $x = 3$ queda $2 \cdot 3 + 3 = 9 = B$

para $x = 2$ queda $2 \cdot 2 + 3 = 7 = -A$ y $A = -7$.

Se tendrá pues

$$\int \frac{(2x+3)dx}{x^2-5x+6} = \int \frac{-7dx}{x-2} + \int \frac{9dx}{x-3}$$

$$= -7 \operatorname{Log}(x-2) + 9 \operatorname{Log}(x-3) = \operatorname{Log} \frac{(x-3)^9}{(x-2)^7} + C.$$

NOTA. — Se hubiera podido también, para calcular A y B, identificar la ecuación (1), lo que da

$$\left| \begin{array}{l} 2 = A + B \\ 3 = -3A - 2B \end{array} \right.$$

de donde se sacaría A y B.

Caso en que el denominador tiene raíces imaginarias.

Se podría llamar u al denominador, como se ha visto en el capítulo precedente, pero se puede operar también como sigue, para lo que veremos un ejemplo numérico.

Sea calcular $\int \frac{(3x-1)dx}{x^2-2x+5}$

Hagamos

$$x^2-2x+5=\left(x-\frac{2}{2}\right)^2-\left(\frac{4-20}{4}\right)=(x-1)^2+\frac{16}{4}=(x-1)^2+4$$

Hagamos

$$x-1=2u \qquad \text{de donde} \qquad dx=2du.$$

Se tendrá

$$I=\int \frac{[3(2u+1)-1]\cdot 2du}{4u^2+4}=\frac{1}{2}\int \frac{(6u+2)du}{u^2+1}$$

que se divide en dos integrales

$$\frac{1}{2}\int \frac{6u\,du}{1+u^2}+\int \frac{du}{1+u^2}=\frac{3}{2}\operatorname{Log}(1+u^2)+\operatorname{arc\,tg}\,u=$$

$$=\frac{3}{2}\operatorname{Log}\left[1+\left(\frac{x-1}{2}\right)^2\right]+\operatorname{arc\,tg}\frac{x-1}{2}+C.$$

32. Segundo caso. — Factores de primer grado repetidos n veces.

Sea por ejemplo $\int \frac{2x+1}{(x-2)^3}dx.$

Donde se encuentra un factor de primer grado repetido tres veces.

— Para cada uno de los factores de primer grado repetidos n veces, corresponde n fracciones en que el exponente n disminuye en una unidad cada vez, escribiendo

$$\frac{2x+1}{(x-2)^3}\equiv\frac{A}{(x-2)^3}+\frac{B}{(x-2)^2}+\frac{C}{x-2}$$

de donde

$$2x+1\equiv A+B(x-2)+C(x-2)^2$$

para

$$x=2 \qquad \text{se tiene} \qquad 5=A,$$

se podría hacer $x=0$, $x=1$, etc., o bien identificar, *pero también podemos derivar*:

$$2=B+2C(x-2)$$

para $x=2$, queda $2=B$. Derivemos otra vez: $0=2C$, de donde

$C = 0$; este método es *muy rápido* y evita cálculos numéricos un poco largos en los que es fácil cometer errores.

Se tendrá pues

$$\int \frac{(2x+1)dx}{(x-2)^3} = 5\int \frac{dx}{(x-2)^3} + 2\int \frac{dx}{(x-2)^2} + 0$$

$$= 5\int \frac{du}{u^3} + 2\int \frac{du}{u^2} = -\frac{5}{2}\frac{1}{u^2} - \frac{2}{u} = -\frac{5}{2(x-2)^2} - \frac{2}{(x-2)}.$$

NOTA. — Si se tuviera una combinación de factores de primer grado no repetidos y de factores de primer grado repetidos n veces, se operaría de la forma indicada para cada tipo de factor, escribiéndose *por ejemplo.*

$$\frac{2x-3}{(x+1)(x-1)^3} \equiv \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x-1)^3} + \frac{C}{(x-1)^2} + \frac{D}{x-1}$$

continuándose como anteriormente.

Ejemplo. — Sea calcular $\int_1^\infty \frac{dx}{x^2(1+x)}$.

Se escribirá

$$\frac{1}{x^2(1+x)} \equiv \frac{A}{1+x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x}$$

de donde

$$1 \equiv Ax^2 + B(1+x) + Cx(1+x).$$

Identifiquemos:

para las x^2 $\quad 0 = A + C$
para las x $\quad 0 = B + C$
para los ctes. $\quad 1 = B$

de donde

$$C = -B = -1 \qquad \text{y} \qquad A = -C = 1.$$

Se tendrá entonces

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^2(1+x)} = \int_1^\infty \frac{dx}{1+x} + \int_1^\infty \frac{dx}{x^2} - \int_1^\infty \frac{dx}{x}$$

$$= \left[\text{Log}\,(1+x)\right]_1^\infty - \left[\frac{1}{x}\right]_1^\infty - \left[\text{Log}\,x\right]_1^\infty$$

$$= \left[\text{Log}\,\frac{1+x}{x}\right]_1^\infty - \left[\frac{1}{x}\right]_1^\infty = \text{Log}\left(\frac{\infty}{\infty}\right) - \text{Log}\,2 - (0-1),$$

Siendo $\text{Log}\,\frac{\infty}{\infty}$ una indeterminación, se puede escribir, dividiendo el numerador y el denominador por x:

$$= \text{Log}\left(\frac{\frac{1}{x}+1}{1}\right)_{x=\infty} - \text{Log}\,2 + 1 = 0 - \text{Log}\,2 + 1 = -2{,}3\cdot 0{,}3 + 1 = 0{,}31.$$

Nota importante. — Vamos a demostrar ahora que la descomposición en fracción racional solamente puede efectuarse de una manera.

En efecto, supongamos que han sido hallados los dos desarrollos:

$$\frac{A_1}{(x-a)^m} + \frac{A_2}{(x-a)^{m-1}} + \ldots + \frac{A_n}{(x-a)}$$

y

$$\frac{B_1}{(x-a)^m} + \frac{B_2}{(x-a)^{m-1}} + \ldots + \frac{B_n}{(x-a)}$$

que, por hipótesis, son iguales.

Multipliquemos los dos desarrollos por $(x-a)^m$, y hagamos después $x = a$; queda

$$A_1 = B_1.$$

Suprimamos entonces estos dos términos y repitamos la misma operación para la fracción siguiente, etc., lo que da

$$A_2 = B_2, \qquad A_3 = B_3 \ldots \qquad A_n = B_n.$$

Solamente hay, pues, una forma de desarrollar en elementos simples. Sería lo mismo para los otros tres casos de descomposición, según la naturaleza de las raíces.

33. Tercer caso. — Factores de segundo grado no repetidos. — A cada uno de los factores de segundo grado corresponde una fracción en la que el numerador es de primer grado, de la forma $\frac{Mx+N}{ax^2+bx+c}$. Se puede, por otra parte, tener una mezcla de factores de primer grado simples y de factores de segundo grado. Se opera entonces independientemente con cada factor de la forma que hemos indicado anteriormente para factores de primer grado.

Ejemplos.

1.° *Sea calcular* $\int \frac{4dx}{x^3 + 4x}$

Escribiremos

$$\frac{4}{x^3 + 4x} = \frac{4}{x(x^2 + 4)} \equiv \frac{A}{x} + \frac{Mx + N}{x^2 + 4}$$

de donde

$$4 \equiv A(x^2 + 4) + x(Mx + N).$$

Para

$$x = 0 \qquad 4 = 4A \qquad \text{luego} \qquad A = 1.$$

Derivemos

$$0 = 2Ax + 2Mx + N$$

y para

$$x = 0 \qquad 0 = N.$$

Derivemos nuevamente

$$0 = 2A + 2M = 2 + 2M, \qquad \text{de donde} \qquad M = -1.$$

Tendremos pues

$$\int \frac{4dx}{x(x^2 + 4)} = \int \frac{dx}{x} + \int \frac{(-x + 0)dx}{x^2 + 4}$$

$$= \text{Log } x - \frac{1}{2}\int \frac{2x\,dx}{x^2 + 4} = \text{Log } x - \frac{1}{2}\text{Log } (x^2 + 4) + \text{Log } C$$

$$= \text{Log } \frac{Cx}{\sqrt{x^2 + 4}}$$

2.° *Sea calcular* $\int \frac{dx}{x^4 - 1}$

Se escribirá

$$\frac{1}{x^4 - 1} = \frac{1}{(x^2 + 1)(x^2 - 1)} =$$

$$= \frac{1}{(x^2 + 1)(x + 1)(x - 1)} \equiv \frac{A}{x + 1} + \frac{B}{x - 1} + \frac{Mx + N}{x^2 + 1}$$

de donde

$$1 \equiv A(x - 1)(x^2 + 1) + B(x + 1)(x^2 + 1) + (Mx + N)(x^2 - 1).$$

Para $x = 1$ se tiene $1 = 4B$ de donde $B = \frac{1}{4}$,

Para $x = -1$ se tiene $1 = -4A$ de donde $A = -\frac{1}{4}$.

Como no sería práctico derivar, identifiqemos:

términos en x^3 $\quad 0 = A + B + M \quad$ de donde $\quad M = 0$

» constantes $\quad 1 = -A + B - N \quad$ de donde $\quad N = -\frac{1}{2}$.

Tendremos pues

$$I = -\frac{1}{4}\int\frac{dx}{x+1} + \frac{1}{4}\int\frac{dx}{x-1} - \frac{1}{2}\int\frac{dx}{1+x^2}$$

$$= -\frac{1}{4}\operatorname{Log}(1+x) + \frac{1}{4}\operatorname{Log}(x-1) - \frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}\,x$$

$$= \frac{1}{4}\operatorname{Log}\frac{x-1}{x+1} - \frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}\,x + C.$$

NOTA. — Muy a menudo todos estos cálculos son inútiles, pudiendo integrarse por sustitución.

Primer ejemplo. — Calcular $\int\frac{x^4\,dx}{(x+1)^3}$.

Hagamos

$$x + 1 = u \quad \text{de donde} \quad du = dx,$$

y se tendrá

$$I = \int\frac{(u-1)^4 du}{u^3} = \int\frac{(u^4 - 4u^3 + 6u^2 - 4u + 1)du}{u^3}$$

$$= \int u\,du - 4\int du + 6\int\frac{du}{u} - 4\int\frac{du}{u^2} + \int\frac{du}{u^3}$$

$$= \frac{u^2}{2} - 4u + 6\operatorname{Log} u + \frac{4}{u} - \frac{1}{2u^2} + C.$$

Se reemplazaría a continuación u por $(x + 1)$.

Segundo ejemplo. — Calcular $\int\frac{x^3\,dx}{x^2-1)^2}$.

Hagamos

$$x^2 - 1 = u \quad \text{de donde} \quad du = 2x\,dx,$$

y

$$I = \int\frac{x^2 \cdot x\,dx}{(x^2-1)^2} = \int\frac{(u+1)\cdot\frac{du}{2}}{u^2}$$

$$= \frac{1}{2}\int\frac{du}{u} + \frac{1}{2}\int\frac{du}{u^2} + C = \frac{1}{2}\operatorname{Log} u - \frac{1}{2u} + C.$$

34. Cuarto caso. — Factores de segundo grado repetidos n veces. — No estudiaremos más que el caso, que es el más frecuente, en que $n = 2$, pues, para $n > 2$, los cálculos son largos y complicados, no pudiendo nosotros considerarlos aquí.

Sea, pues, integrar

$$\int \frac{dx}{(ax^2 + bx + c)^2}$$

De la misma forma que en el segundo caso, tendremos dos fracciones donde el numerador será ahora de primer grado, de la forma $Mx + N$, y, en el denominador, los exponentes serán, primero 2 y después 1;

$$I = \int \frac{(Mx + N)dx}{(ax^2 + bx + c)^2} + \int \frac{(Px + R)dx}{ax^2 + bx + c}$$

que se divide en cuatro integrales, de la forma

$$\int \frac{Mx\,dx}{D^2}, \quad \int \frac{N\,dx}{D^2}, \quad \int \frac{Px\,dx}{D} \quad \text{y} \quad \int \frac{R\,dx}{D}$$

En el número anterior hemos integrado la última, obteniéndose un logaritmo o un arc tg. Para la penúltima, se hace aparecer en el numerador la diferencial del denominador sumando y restando las cantidades convenientes.

Se opera análogamente con la primera integral.

En cuanto a la segunda, se descompone el denominador en forma canónica, lo que da

$$\int \frac{N du}{(u^2 + 1)^2}.$$

Y se escribirá

$$\int \frac{N du}{(u^2 + 1)^2} = N \int \frac{(u^2 + 1 - u^2)du}{(u^2 + 1)^2}$$

$$= N \int \frac{(u^2 + 1)du}{(u^2 + 1)^2} - N \int \frac{u^2\,du}{(u^2 + 1)^2}$$

$$= N \int \frac{du}{u^2 + 1} - \frac{N}{2} \int u \cdot \frac{2u\,du}{(u^2 + 1)^2}.$$

La primera da un arc tg y la segunda se integra por partes; es de la forma $\int u \cdot dv = \int u \cdot \frac{dz}{z^2}$, fácil de calcular, como se ha visto en un capítulo precedente.

Ejemplos. — 1.° *Calcular* $\int \frac{dx}{(u^2+1)^2}$

Se escribirá

$$\int \frac{dx}{(u^2+1)^2} = \int \frac{(x^2+1-x^2)dx}{(x^2+1)^2}$$

$$= \int \frac{(x^2+1)dx}{(x^2+1)^2} - \frac{1}{2}\int x \cdot \frac{2x\,dx}{(x^2+1)^2}$$

$$= \int \frac{dx}{x^2+1} - \frac{1}{2}\left[x\left(-\frac{1}{x^2+1}\right) - \int -\frac{1}{x^2+1}\cdot dx\right.$$

$$= \operatorname{arc\,tg} x + \frac{x}{2(x^2+1)} - \frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg} x$$

$$= \frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg} x + \frac{x}{2(x^2+1)} + C.$$

2.° *Calcular* $\int \frac{(x^3+x^2+2)dx}{(x^2+2)^2}$.

Se escribirá

$$\frac{x^3+x^2+2}{(x^2+2)^2} \equiv \frac{Mx+N}{(x^2+2)^2} + \frac{Px+R}{x^2+2}$$

de donde

$$x^3+x^2+2 \equiv (Mx+N) + (Px+R)(x^2+2).$$

Identifiquemos

$$\left|\begin{array}{lll} 1 = P & & \\ 1 = R & & \\ 0 = M + 2P & \text{de donde} & M = -2P = -2 \\ 2 = N + 2R & \text{de donde} & N = 2 - 2R = 0. \end{array}\right.$$

Se tendrá pues

$$I = \int \frac{-2x\,dx}{(x^2+2)^2} + \int \frac{(x+1)dx}{x^2+2}$$

$$= -\int \frac{du}{u^2} + \int \frac{x\,dx}{x^2+2} + \int \frac{dx}{x^2+2}$$

$$= \frac{1}{x^2+2} + \frac{1}{2}\operatorname{Log}(x^2+2) + \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{\sqrt{2}} + C.$$

35. Otro método para integrar $\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^m}$.

Pueden utilizarse fórmulas de recurrencia ya mencionadas.

Sea por ejemplo calcular

$$I = \int \frac{dx}{(x^2+1)^4}$$

que designaremos por I_4.

Podremos reducirnos al cálculo de I_3, después de I_2 y, finalmente, de I_1.

Pongamos

$$I_3 = \int \frac{dx}{(x^2+1)^3} \qquad I_2 = \int \frac{dx}{(x^2+1)^2} \qquad I_1 = \int \frac{dx}{x^2+1}.$$

En efecto, I_4 se puede escribir

$$I^4 = \int \frac{(x^2+1-x^2)dx}{(x^2+1)^4} = \int \frac{dx}{(x^2+1)^3} - \int \frac{x^2\,dx}{(x^2+1)^4}$$

$$= I_3 - \int x \cdot \frac{x\,dx}{(x^2+1)^4}.$$

Hagamos en esta última

$$x = u \qquad dx = du$$

y

$$\frac{x\,dx}{(x^2+1)^4} = dv \qquad \text{de donde} \qquad v = -\frac{1}{6}\frac{1}{(x^2+1)^3},$$

lo que da

$$I_4 = I_3 - \left[-\frac{x}{6(x^2+1)^3} + \int \frac{dx}{6(x^2+1)^3}\right]$$

$$= I^3 - \frac{1}{6} I_3 + \frac{x}{6(x^2+1)^3} = \frac{5}{6} I_3 + \frac{x}{6(x^2+1)^3}.$$

Operando de manera similar para calcular I_3, se obtendría ésta en función de I_2, y luego ésta en función de I_1.

— Este procedimiento se aplica también al caso de $\int \frac{dx}{(ax^2+bx+c)^m}$ cuando las raíces son imaginarias, ya que, como sabemos, un trinomio puede en este caso ponerse bajo la forma de una suma de dos cuadrados.

Este procedimiento es, evidentemente, un poco largo.

CAPITULO VIII

INTEGRACION DE LAS EXPRESIONES TRIGONOMETRICAS

No hay un método general, sino simplemente un cierto número de procedimientos que se emplean según el tipo de integral a calcular.

36. Primer caso. — Integrales de la forma $\int f(\text{sen } x, \cos x, \text{tg } x)dx$

Se trata de una función *cualquiera* de *sen x*, de *cos x* o de *tg x de primer grado* Puede ser una fracción racional que contenga una o varias de estas líneas trigonométricas, pero *de primer grado*. Por ejemplo

$$\int \frac{dx}{1 + \text{sen } x}, \quad \int \frac{dx}{\cos x}, \quad \int \frac{dx}{2 \text{ sen } x + 3 \cos x + 1}, \text{ etc}$$

Regla: *Se expresa sen x, cos x y tg x en función de* $tg \frac{x}{2}$.

— Vamos a ver, en efecto, que estas tres líneas trigonométricas pueden expresarse de esta forma sin ninguna raíz cuadrada, es decir «*racionalmente*».

En efecto, partamos de las fórmulas

$$\left|\begin{array}{l} \text{sen } 2x = 2 \text{ sen } x \cdot \cos x \\ \cos 2x = \cos^2 x - \text{sen}^2 x \\ \text{tg } 2x = \dfrac{2 \text{ tg } x}{1 - \text{tg}^2 x}, \end{array}\right.$$

se deduce, puesto que el ángulo de la izquierda es el doble del de la derecha:

$$\left|\begin{array}{l} \operatorname{sen} x = 2 \operatorname{sen} \dfrac{x}{2} \cdot \cos \dfrac{x}{2} \\ \cos x = \cos^2 \dfrac{x}{2} - \operatorname{sen}^2 \dfrac{x}{2} \\ \operatorname{tg} x = \dfrac{2 \operatorname{tg} \dfrac{x}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \dfrac{x}{2}}. \end{array}\right.$$

Pongamos $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$, y expresemos $\operatorname{sen} \frac{x}{2}$ y $\cos \frac{x}{2}$ en función de $\operatorname{tg} \frac{x}{2}$:

$$\left|\begin{array}{l} \operatorname{sen} x = 2 \dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}} \\ \cos x = \left(\dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}\right)^2 - \left(\dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}}\right)^2 \\ \operatorname{tg} x = \dfrac{2t}{1-t^2} \end{array}\right.$$

de donde se deducen las tres fórmulas fundamentales, muy prácticas:

$$\left|\begin{array}{l} \mathbf{sen\ x} = \dfrac{\mathbf{2t}}{\mathbf{1+t^2}} \\ \mathbf{cos\ x} = \dfrac{\mathbf{1-t^2}}{\mathbf{1+t^2}} \\ \mathbf{tg\ x} = \dfrac{\mathbf{2t}}{\mathbf{1-t^2}} \end{array}\right.$$

Se tendrá

$$\frac{x}{2} = \operatorname{arc\,tg}\, t \qquad \text{y} \qquad x = 2 \operatorname{arc\,tg}\, t$$

de donde

$$dx = \frac{2dt}{1 + t^2},$$

y llevando esto a la integral habrá simplificaciones. Se llega entonces o bien a integrales sencillas, o bien a otras integrales por uno de los procedimientos estudiados en los capítulos precedentes.

Ejemplos.

1.° *Calcular* $\int \frac{dx}{\operatorname{sen} x}$

Inmediatamente podemos escribir

$$I = \int \frac{\frac{2\,dt}{1 + t^2}}{\frac{2t}{1 + t^2}} = \int \frac{dt}{t} = \operatorname{Log} t$$

$$\boxed{\int \frac{dx}{\operatorname{sen} x} = \operatorname{Log} \operatorname{tg} \frac{x}{2} + C.}$$

2.° *Calcular* $\int \frac{dx}{\cos x}.$

Primer procedimiento: se tiene

$$I = \int \frac{dx}{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)} = \quad \text{también a} \quad \int \frac{dx}{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + x\right)} = \int \frac{du}{\operatorname{sen} u}$$

$$= \operatorname{Log} \operatorname{tg} \frac{u}{2} = \operatorname{Log} \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right) + C.$$

Segundo procedimiento: se tiene

$$I = \int \frac{\frac{2dt}{1 + t^2}}{\frac{1 - t^2}{1 + t^2}} = \int \frac{2dt}{1 - t^2}.$$

Descompongamos, pues, esta fracción racional

$$\frac{2}{1-t^2} = \frac{2}{(1+t)(1-t)} \equiv \frac{A}{1+t} + \frac{B}{1-t}$$

de donde

$$2 \equiv A(1-t) + B(1+t)$$

para	$t = 1$	queda	$2 = 2B$	$B = 1$
para	$t = -1$	queda	$2 = 2A$	$A = 1$

Se tendrá

$$I = \int \frac{dt}{1+t} + \int \frac{dt}{1-t} = \text{Log}\,(1+t) - \text{Log}\,(1-t)$$

$$= \text{Log}\,\frac{1+t}{1-t} = \text{Log}\,\frac{1+\text{tg}\,\frac{x}{2}}{1-\text{tg}\,\frac{x}{2}} + C.$$

Caso general: $\displaystyle\int \frac{dx}{a\cdot\text{sen}\,x + b\cdot\cos x + c}$.

Se emplea el mismo método, y, después de simplificar, encontraremos en el denominador un trinomio en t que sabemos integrar.

Ejemplos. — 1.° *Calcular* $\displaystyle\int \frac{dx}{\text{sen}\,x + \cos x + 2}$.

Se tendrá

$$I = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2} + \left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right) + 2} = \int \frac{2dt}{2t + (1-t^2) + 2(1+t^2)}$$

$$= \int \frac{2dt}{t^2 + 2t + 3} = \int \frac{2dt}{(t+1)^2 + 2}$$

$$= \int \frac{dt}{\left(\frac{t+1}{\sqrt{2}}\right)^2 + 1} = \sqrt{2}\int \frac{du}{u^2+1} = \sqrt{2}\,\text{arc tg}\left(\frac{t+1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$= \sqrt{2}\,\text{arc tg}\left(\frac{\text{tg}\,\frac{x}{2}+1}{\sqrt{2}}\right) + C.$$

2.° *Calcular* $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{dx}{5 + 3\cos x}$

Se tendrá

$$= \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{5 + 3\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)} = \int \frac{2dt}{5(1+t^2) + 3(1-t^2)}$$

$$I = \int \frac{2dt}{2t^2 + 8} = \int \frac{dt}{t^2 + 4} = \frac{1}{2} \int \frac{\frac{dt}{2}}{\left(\frac{t}{2}\right)^2 + 1}$$

$$= \frac{1}{2} \operatorname{arc\,tg} \left[\frac{t}{2}\right]_0^{2\pi}.$$

Pero, cuando x varía de 0 a 2π, $\operatorname{tg} \frac{x}{2}$ se hace infinita en el intervalo, para el valor $x = \pi$. Dividamos entonces la integral en dos, variando t de 0 a $+\infty$ y después de $-\infty$ a 0:

$$I = \frac{1}{2} \left[\operatorname{arc\,tg} \frac{t}{2}\right]_{t=0}^{t=+\infty} + \frac{1}{2} \left[\operatorname{arc\,tg} \frac{t}{2}\right]_{t=-\infty}^{t=0}$$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{\pi}{2} - 0\right] + \frac{1}{2} \left[0 - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right] = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}.$$

NOTA. — El lector deberá recordar que

$$\operatorname{arc\,tg}(\operatorname{tg} x) = x$$
$$\operatorname{arc\,sen}(\operatorname{sen}) x = x$$
$$\operatorname{arc\,cos}(\cos x) = x,$$

basta con trazar una figura representando un ángulo x, así como, por ejemplo, su tangente, para ver que el arco cuya tangente es la tangente del arco x es justamente este mismo ángulo x.

Caso particular. En el caso de la integral

$$\int \frac{dx}{a \operatorname{sen} x + b \cos x}$$

sería más sencillo reemplazar el denominador por su equivalencia trigonométrica. Sabemos, en efecto, que

$$a \operatorname{sen} x + b \cos x \equiv \mathrm{M} \cdot \operatorname{sen}(x - \varphi) \qquad \begin{pmatrix} \text{con} & \mathrm{M} = \sqrt{a^2 + b^2} \\ \text{y} & \operatorname{tg} \varphi = -\dfrac{b}{a} \end{pmatrix}.$$

Se tendrá pues

$$\mathrm{I} = \int \frac{dx}{\mathrm{M} \cdot \operatorname{sen}(x - \varphi)} = \frac{1}{\mathrm{M}} \int \frac{du}{\operatorname{sen} u} = \frac{1}{\mathrm{M}} \cdot \operatorname{Log} \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} - \frac{\varphi}{2}\right) + \mathrm{C}.$$

Tercer ejemplo. — Calcular $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen} x\, dx}{1 + \operatorname{sen} x}$

$$\mathrm{I} = \int \frac{(1 + \operatorname{sen} x - 1)dx}{1 + \operatorname{sen} x} = \int dx - \int \frac{dx}{1 + \operatorname{sen} x}$$

$$= x - \int \frac{\dfrac{2dt}{1 + t^2}}{1 + \dfrac{2t}{1 + t^2}} = x - \int \frac{2dt}{t^2 + 2t + 1} = x - 2\int \frac{dt}{(1 + t)^2}$$

$$= x + \frac{2}{1 + t} = x + \frac{2}{1 + \operatorname{tg} \dfrac{x}{2}} + \mathrm{C}.$$

Cuarto ejemplo. — Calcular $\displaystyle\int \frac{\operatorname{tg} x\, dx}{1 + \cos x}$

Aquí es más sencillo poner $\cos x = t$

de donde

$$dx = \frac{-dt}{\sqrt{1 - t^2}} \qquad \text{y} \qquad \operatorname{sen} x = \sqrt{1 - t^2}$$

luego

$$\mathrm{I} = \int \frac{\dfrac{\sqrt{1 - t^2}}{t}\left(-\dfrac{dt}{\sqrt{1 - t^2}}\right)}{1 + t} = -\int \frac{dt}{t(1 + t)}$$

Se obtiene una fracción racional fácil de integrar, hallándose

$$\mathrm{I} = \operatorname{Log}\left(\frac{1 + \cos x}{\cos x}\right) + \mathrm{C},$$

resultado que se obtendría también haciendo $\operatorname{tg} \dfrac{x}{2} = t$.

37. Segundo caso. Integrales de la forma:

$$\int \text{sen mx} \cdot \cos \text{px dx}, \quad \int \text{sen mx} \cdot \text{sen px dx} \quad \text{o} \quad \int \cos \text{mx} \cdot \cos \text{px dx}.$$

Regla: *Se transforman estos productos en sumas por medio de las fórmulas de transformación.* Sabemos, en efecto, que

$$\text{sen } a \cdot \cos b = \frac{1}{2}[\text{sen } (a + b) + \text{sen } (a - b)]$$

$$\text{sen } a \cdot \text{sen } b = \frac{1}{2}[\cos (a - b) - \cos (a + b)]$$

$$\cos a \cdot \cos b = \frac{1}{2}[\cos (a + b) + \cos (a - b)].$$

Ejemplo. — Calcular $\int \text{sen } 3x \cdot \cos 2x \, dx.$

Se tendrá, aplicando la primera fórmula:

$$I = \int \frac{1}{2}[\text{sen } (3x + 2x) + \text{sen } (3x - 2x)]dx$$

$$= \frac{1}{2}\int \text{sen } 5x \, dx + \frac{1}{2}\int \text{sen } x \, dx = -\frac{1}{10}\cos 5x - \frac{1}{2}\cos x + C.$$

NOTA. — Este tipo de integrales nos servirá en el Tomo IV en las series de FOURIER, donde haremos ejemplos eléctricos.

38. Tercer caso. — Integrales de la forma

$$\int \mathbf{f(sen^2 x, \cos^2 x, tg^2 x, sen x \cdot \cos x)dx.}$$

Se trata de una función que contiene un $\text{sen}^2 x$, o un $\cos^2 x$, o $\text{tg}^2 x$, o el producto $\text{sen } x \cdot \cos x$, o bien una combinación de estos términos. En una palabra, se trata de líneas trigonométricas elevadas *al cuadrado.*

La función f puede ser, por otra parte, una fracción racional, es decir, que las expresiones precedentes pueden también encontrarse en el denominador de una fracción.

Regla. — *Se expresa todos los términos en función de* $\operatorname{tg} x = t$.

Se deduce

$$x = \operatorname{arc\,tg}\, t \qquad \text{de donde} \qquad dx = \frac{dt}{1 + t^2}$$

Se sabe, en efecto, que

$$\operatorname{sen} x = \frac{t}{\sqrt{1 + t^2}} \qquad \text{y} \qquad \cos x = \frac{1}{\sqrt{1 + t^2}}.$$

La integral se simplifica, reduciéndose a una integral conocida. Sin embargo, para las dos integrales

$$\int \operatorname{sen}^2 x\, dx \qquad \text{y} \qquad \int \cos^2 x\, dx$$

es más sencillo expresarlas en función de cos $2x$:

$$\int \operatorname{sen}^2 x\, dx = \int \left(\frac{1 - \cos 2x}{2}\right) dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2x + C$$

y

$$\int \cos^2 x\, dx = \int \left(\frac{1 + \cos 2x}{2}\right) dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2x + C$$

Ejemplos.

1.° *Calcular* $\displaystyle\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^2 x}$.

Se tendrá

$$I = \int \frac{\dfrac{dt}{1 + t^2}}{\dfrac{t^2}{1 + t^2}} = \int \frac{dt}{t^2} = -\frac{1}{t} = -\frac{1}{\operatorname{tg} x} + C.$$

Podría también haberse escrito

$$\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^2 x} = \int \frac{dx}{\cos^2\left(\frac{\pi}{2} - x\right)} = -\int \frac{du}{\cos^2 u}$$

$$= -\operatorname{tg} u = -\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

$$= -\frac{1}{\operatorname{tg} x} + C.$$

2.° *Calcular* $\int \operatorname{tg}^4 x\, dx.$

Tenemos inmediatamente

$$I = \int t^4 \cdot \frac{dt}{1+t^2} = \int \frac{t^4\, dt}{1+t^2},$$

haciendo la división se halla

$$\frac{t^4}{1+t^2} = t^2 - 1 + \frac{1}{1+t^2}$$

de donde

$$I = \int t^2\, dt - \int dt + \int \frac{dt}{1+t^2}$$

$$= \frac{t^3}{3} - t + \operatorname{arc\,tg}\, t = \frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x - \operatorname{tg} x + \operatorname{arc\,tg}\,(\operatorname{tg} x)$$

$$= \frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x - \operatorname{tg} x + x + C.$$

Pero veremos más adelante otros dos métodos, uno de los cuales es muy ingenioso (párrafo 41).

39. Cuarto caso. — Integrales de la forma $\int \operatorname{sen}^m x \cdot \cos^p x\, dx.$

1.° *m o p es impar*:

Se busca la manera de escribir, por ejemplo, suponiendo *m* impar,

$$\int \operatorname{sen}^{m-1} x \cdot \cos^p x \cdot \operatorname{sen} x\, dx$$

siendo entonces $m-1$ par, se expresará $sen^{m-1} x$ en función de $\cos x$, y se pondrá $\cos x = u$ (cuya diferencial, salvo el signo, vale $sen\, x\, dx$). De esta forma no tendremos más que *senos* o *cosenos*. Un ejemplo nos aclarará mejor esto.

Ejemplo. — *Calcular* $\int \operatorname{sen}^3 x \cdot \cos^2 x\, dx$

Se escribirá

$$I = \int \operatorname{sen}^2 x \cdot \cos^2 x \cdot \operatorname{sen} x\, dx = \int (1 - \cos^2 x) \cos^2 x \cdot \operatorname{sen} x\, dx$$

lo que nos da integrales

$$I = \int \cos^2 x \cdot \operatorname{sen} x\, dx - \int \cos^4 x \cdot \operatorname{sen} x\, dx$$

$$= -\int u^2\, du + \int u^4\, du = -\frac{u^3}{3} + \frac{u^5}{5}$$

$$= -\frac{1}{3}\cos^3 x + \frac{1}{5}\cos^5 x + C.$$

NOTA. — Este método se aplica también para integrar

$$\int \operatorname{sen}^m x dx \quad \text{o} \quad \int \cos^m x\, dx \quad \textit{para } m \textit{ impar.}$$

Por ejemplo, sea calcular $\int \operatorname{sen}^5 x\, dx$.

Se escribirá

$$I = \int \operatorname{sen}^4 x \cdot \operatorname{sen} x\, dx = \int (1 - \cos^2 x)^2 \operatorname{sen} x\, dx$$

$$= \int \operatorname{sen} x\, dx + \int \cos^4 x \operatorname{sen} x\, dx - 2\int \cos^2 x \cdot \operatorname{sen} x\, dx$$

$$= -\cos x - \frac{1}{5}\cos^5 x + \frac{2}{3}\cos^3 x + C.$$

2.° *m y p son pares*:

Se expresa todo en función de $\operatorname{sen} x$ o de $\cos x$, reduciéndose así el problema a integrar una potencia par de $\operatorname{sen} x$ o de $\cos x$, lo que estudiaremos ahora.

Ejemplo. — Calcular $\int \cos^2 x \cdot \operatorname{sen}^4 x\, dx$.

Se escribirá

$$I = \int \cos^2 x\, (1 - \cos^2 x)^2 dx$$

$$= \int \cos^2 x\, dx + \int \cos^6 x\, dx - 2\int \cos^4 x\, dx, \text{ etc.}$$

40. Caso general de $\int \text{sen}^m x\,dx$ o $\int \cos^m x\,dx$,

Vamos a indicar varios procedimientos.

1er Procedimiento. *Se puede integrar por partes, y escribir*

$$I = \int \text{sen}^{m-1} x \cdot \text{sen}\, x\,dx = \int u \cdot dv \quad \text{con} \quad \left| \begin{array}{l} du = (m-1)\,\text{sen}^{m-2} x \cdot \cos x\,dx \\ v = -\cos x \end{array} \right.$$

$$= -\text{sen}^{m-1} x \cdot \cos x - \int (m-1)\,\text{sen}^{m-2} x(-\cos^2 x)dx$$

$$= -\text{sen}^{m-1} x \cdot \cos x + (m-1) \int \text{sen}^{m-2} x(1 - \text{sen}^2 x)dx$$

$$= -\text{sen}^{m-1} x \cdot \cos x + (m-1) \int \text{sen}^{m-2} x\,dx - (m-1) \int \text{sen}^m x\,dx$$

y esta última integral es justamente la buscada; basta entonces con pasarla al primer miembro:

$$I[1 + (m-1)] = mI = -\text{sen}^{m-1} x \cdot \cos x + (m-1) \int \text{sen}^{m-2} x\,dx,$$

dividiendo por m se tendrá I en función de una integral en la que el exponente se ha convertido en $m-2$. Se puede entonces integrar directamente o por partes esta nueva integral.

Ejemplo. Sea calcular $\int \text{sen}^4 x\,dx$.

Se escribirá

$$I = \int \text{sen}^3 x \,\text{sen}\, x\,dx = \int u \cdot dv \quad \text{con} \quad \left| \begin{array}{l} du = 3\,\text{sen}^2 x \cdot \cos x\,dx \\ v = -\cos x \end{array} \right.$$

$$= \text{sen}^3 x(-\cos x) - \int -\cos x \cdot 3\,\text{sen}^2 x \cdot \cos x\,dx$$

$$= -\text{sen}^3 x \cdot \cos x + 3 \int \text{sen}^2 x(1 - \text{sen}^2 x)dx$$

$$I = -\text{sen}^3 x \cdot \cos x + 3 \int \text{sen}^2 x\,dx - 3I$$

es decir

$$4I = -\text{sen}^3 x \cdot \cos x + 3 \int \text{sen}^2 x\,dx,$$

donde la última integral es fácil de calcular (ver más arriba).

NOTA. — Si m es igual a 3, es preferible utilizar las fórmulas siguientes, bien conocidas en trigonometría

$$\left|\begin{array}{l} \operatorname{sen} 3x = 3 \operatorname{sen} x - 4 \operatorname{sen}^3 x \\ \cos 3x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x \end{array}\right.$$

de donde se deduce $\operatorname{sen}^3 x$ o $\cos^3 x$ en función de líneas trigonométricas *de primer grado,* fáciles de integrar.

Si $m = 4$, se elevarán al cuadrado las fórmulas siguientes

$$\left|\begin{array}{l} \operatorname{sen}^2 x = \dfrac{1 - \cos 2x}{2} \\ \\ \cos^2 x = \dfrac{1 + \cos 2x}{2} \end{array}\right.$$

lo que dará tres integrales. Por ejemplo.

$$\int \cos^4 x\, dx = \int \left(\frac{1 + \cos 2x}{2}\right)^2 dx = \frac{1}{4}\left[\int dx + 2\int \cos 2x\, dx + \int \cos^2 2x\, dx\right]$$

fáciles de integrar, reemplazándose la última en función de cos $4x$:

$$\cos^2 2x = \frac{1 + \cos 4x}{2}.$$

2.° **Procedimiento:**

a) Si m *es impar,* se emplea el procedimiento indicado anteriormente, escribiendo

$$\int \operatorname{sen}^m x\, dx = \int \operatorname{sen}^{m-1} x \cdot \operatorname{sen} x\, dx, \text{ etc.}$$

b) Si m es *par,* se pone $\operatorname{tg} x = t$ y se expresa todo en función de t, mediante las fórmulas

$$\operatorname{sen} x = \frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 x}} \quad \text{y} \quad \cos x = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 x}}.$$

Ejemplo. — Calcular $\displaystyle\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^4 x}$

Se tendrá

$$I = \int \frac{\frac{dt}{1+t^2}}{\frac{t^4}{(1+t^2)^2}} = \int \frac{(1+t^2)dt}{t^4}$$

$$I = \int \frac{dt}{t^4} + \int \frac{dt}{t^2} + C$$

que se integran rápidamente.

3er Procedimiento: *Se utilizan las fórmulas de* EULER:

$$\cos x = \frac{e^{jx} + e^{-jx}}{2} \qquad \text{sen } x = \frac{e^{jx} - e^{-jx}}{2j}$$

que se eleva a la potencia *m, siendo m par o impar,* lo que constituye la ventaja de este procedimiento, muy general. Los coeficientes de $(a + b)^m$ están dados por el triángulo de PASCAL (ver Tomo I). Pero el cálculo presenta ciertas particularidades que vamos a explicar con detalle mediante dos ejemplos.

Ejemplos.

1.° *Sea calcular* $\int \text{sen}^4 x\, dx.$

— Se tendrá

$$I = \int \left(\frac{e^{jx} - e^{-jx}}{2j}\right)^4 dx$$

$$= \frac{1}{16}\int [e^{4jx} - 4e^{3jx} \cdot e^{-jx} + 6e^{2jx} \cdot e^{-2jx} - 4e^{jx} \cdot e^{-3jx} + e^{-4jx}]dx.$$

simplifiquemos los productos de exponenciales

$$I = \frac{1}{16}\int [e^{4jx} - 4e^{2jx} + 6 - 4e^{-2jx} + e^{-4jx}]dx,$$

sumemos los términos equidistantes del centro

$$I = \frac{1}{16}\int [(e^{4jx} + e^{-4jx}) - 4(e^{2jx} + e^{-2jx}) + 6]dx.$$

Ahora bien, según las fórmulas de EULER, el primer paréntesis es igual a $2\cos 4x$ y el segundo a $2\cos 2x$; se tendrá pues

$$I = \frac{1}{16}\left[\int 2\cos 4x\,dx - 4\int 2\cos 2x\,dx + 6\int dx\right]$$

$$= \frac{1}{16}\left[\frac{1}{2}\operatorname{sen} 4x - 4\operatorname{sen} 2x + 6x\right]$$

$$= \frac{1}{32}\operatorname{sen} 4x - \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2x + \frac{3}{8}x + C.$$

2.° *Sea calcular* $\int \cos^5 x\,dx.$

— Se tendrá

$$I = \int\left(\frac{e^{jx} + e^{-jx}}{2}\right)^5 dx$$

$$= \frac{1}{32}\int\left[e^{5jx} + 5e^{4jx}\cdot e^{-jx} + 10e^{3jx}\cdot e^{-2jx} + 10e^{2jx}\cdot e^{-3jx} + 5e^{jx}\cdot e^{-4jx} + e^{-5jx}\right]dx$$

$$= \frac{1}{32}\int\left[e^{5jx} + 5e^{3jx} + 10e^{jx} + 10e^{-jx} + 5e^{-3jx} + e^{-5jx}\right]dx,$$

agrupemos los términos equidistantes del centro:

$$I = \frac{1}{32}\int\left[(e^{5jx} + e^{-5jx}) + 5(e^{3jx} + e^{-3jx}) + 10(e^{jx} + e^{-jx})\right]dx$$

$$= \frac{1}{32}\int\left[2\cos 5x + 5\cdot 2\cos 3x + 10\cdot 2\cos x\right]dx$$

$$= \frac{1}{32}\left[2\int\cos 5x\,dx + 10\int\cos 3x\,dx + 20\int\cos x\,dx\right.$$

$$= \frac{1}{32}\left[\frac{2}{5}\operatorname{sen} 5x + \frac{10}{3}\operatorname{sen} 3x + 20\operatorname{sen} x\right] + C.$$

41. Integrales de la forma $\int \operatorname{tg}^m x\,dx$ o $\int \frac{dx}{\operatorname{tg}^m x}$

— Hay dos casos, según que m sea par o impar.

1er caso. — *m es par.*

Regla: Se pone $\operatorname{tg} x = t$, *de donde* $dx = \dfrac{dt}{1+t^2}$, *y la integral se simplifica.*

Ejemplo. — Calcular $\displaystyle\int \frac{dt}{\operatorname{tg}^4 x}$

— Se tendrá

$$I = \int \frac{\dfrac{dt}{1+t^2}}{t^4} = \int \frac{dt}{t^4(1+t^2)},$$

fracción racional que se descompondrá en elementos simples

$$\frac{1}{t^4(1+t^2)} = \frac{A}{t^4} + \frac{B}{t^3} + \frac{C}{t^2} + \frac{D}{t} + \frac{mt+p}{1+t^2}$$

que se integra fácilmente.

2.° caso. — *m es impar.*

Regla: si m es positivo se hace $\cos x = t$

si m es negativo se hace $\operatorname{sen} x = t$.

Ejemplos.

1.° *Calcular* $\displaystyle\int \frac{dx}{\operatorname{tg}^3 x}$

— Se tiene $m = -3$ luego haremos $\operatorname{sen} x = t$,

por tanto será

$$\cos x\, dx = dt,$$

Entonces

$$I = \int \frac{\cos^3 x}{\operatorname{sen}^3 x}\, dx = \int \frac{\cos^2 x}{\operatorname{sen}^3 x} \cdot \cos x\, dx = \int \frac{(1-t^2)\cdot dt}{t^3}$$

$$= \int \frac{dt}{t^3} - \int \frac{dt}{t} = -\frac{1}{2t^2} - \operatorname{Log} t$$

$$= -\frac{1}{2\operatorname{sen}^2 x} - \operatorname{Log} \operatorname{sen} x + C.$$

2.° *Calcular* $\displaystyle\int \operatorname{tg}^5 x\, dx.$

—Se tiene $m = +5$, luego haremos $\cos x = t$,

por tanto será

$$dt = -\operatorname{sen} x\, dx,$$

Entonces

$$I = \int \frac{\operatorname{sen}^5 x}{\cos^5 x}\, dx = \int \frac{\operatorname{sen}^4 x \cdot \operatorname{sen} x\, dx}{\cos^5 x} = \int \frac{(1 - t^2)^2(-dt)}{t^5}$$

$$= -\int \frac{dt}{t^5} - \int \frac{dt}{t} + 2\int \frac{dt}{t^3} + C,$$

que se integran fácilmente.

Otro procedimiento para calcular $\int \operatorname{tg}^m x\, dx$.

Haremos que aparezca $(1 + \operatorname{tg}^2 x)$, que es la diferencial de $\operatorname{tg} x$, sumando y restando 1, obteniéndose integrales de potencia.

Ejemplo. — Calcular $\int \operatorname{tg}^5 x\, dx$

—Se tendrá

$$I = \int \operatorname{tg}^3 x(1 + \operatorname{tg}^2 x - 1)dx,$$

que se divide en dos integrales

$$I = \int \operatorname{t}^3 x(1 + \operatorname{tg}^2 x)dx - \int \operatorname{tg}^3 x\, dx$$

$$= \int u^3\, du - \int \operatorname{tg} x(1 + \operatorname{tg}^2 x - 1)dx$$

$$= \frac{u^4}{4} - \int \operatorname{tg} x(1 + \operatorname{tg}^2 x)dx + \int \operatorname{tg} x\, dx$$

$$= \frac{1}{4}\operatorname{tg}^4 x - \frac{1}{2}\operatorname{tg}^2 x - \int \frac{-\operatorname{sen} x\, dx}{\cos x}$$

$$= \frac{1}{4}\operatorname{tg}^4 x - \frac{1}{2}\operatorname{tg}^2 x - \operatorname{Log}\cos x + C.$$

42. Otras integrales trigonométricas. — Se puede tener también un cociente de senos y de cosenos con cualquier potencia. En este caso se hace

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t \qquad \text{de donde} \qquad dx = \frac{2dt}{1+t^2}.$$

Ejemplos:

1.° *Calcular* $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen}^2 x\, dx}{\cos^3 x}$.

— Se tendrá

$$I = \int \frac{\left(\frac{2t}{1+t^2}\right)^2 \cdot \frac{2dt}{1+t^2}}{\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)^3} = 8\int \frac{t^2\, dt}{(1-t^2)^3}$$

que descompondremos en elementos simples:

$$\frac{t^2}{(1-t^2)^3} = \frac{t^2}{(1+t)^3(1-t)^3}$$

$$\equiv \frac{A}{(1+t)^3} + \frac{B}{(1+t)^2} + \frac{C}{1+t} + \frac{D}{(1-t)^3} + \frac{E}{(1-t)^2} + \frac{F}{1-t}$$

este procedimiento resulta aquí bastante largo.

Podríamos también haber escrito de primera intención

$$I = \int \frac{(1-\cos^2 x)}{\cos^3 x}\, dx = \int \frac{dx}{\cos^3 x} - \int \frac{dx}{\cos x}$$

Sabemos integrar la segunda; en cuanto a la primera, se escribiría

$$\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^3\left(\frac{\pi}{2}-x\right)} = -\int \frac{du}{\operatorname{sen}^3 u} = -\int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\left(\frac{2t}{1+t^2}\right)^3}$$

$$= -\frac{1}{4}\int \frac{(1+t^2)^2 dt}{t^3} = -\frac{1}{4}\left[\int \frac{dt}{t^3} + 2\int \frac{dt}{t} + \int t\, dt\right] + C.$$

que se integran enseguida (*es, en efecto, más práctico, por este método, tener un seno en el denominador mejor que un coseno*).

2.° *Calcular* $\int \frac{\cos^3 x\,dx}{\operatorname{sen}^2 x}$.

— Aquí, sería más práctico escribir

$$I = \int \frac{\cos^2 x \cdot \cos x\,dx}{\operatorname{sen}^2 x} = \int \frac{(1 - \operatorname{sen}^2 x)\cos x\,dx}{\operatorname{sen}^2 x}$$

$$= \int \frac{\cos x\,dx}{\operatorname{sen}^2 x} - \int \cos x\,dx = -\frac{1}{\operatorname{sen} x} - \operatorname{sen} x.$$

Así, se ve que todo depende del tipo de la integral, y, muy a menudo, gracias a una pequeña transformación, que exige la iniciativa del operador, se llega a integrales simples.

3.° *Calcular* $\int \frac{dx}{\operatorname{sen} x \cos^2 x}$

— Multipliquemos el numerador y el denominador por sen x:

$$I = \int \frac{\operatorname{sen} x\,dx}{\operatorname{sen}^2 x \cdot \cos^2 x} = \int \frac{\operatorname{sen} x\,dx}{(1 - \cos^2 x)\cos^2 x}$$

$$= -\int \frac{du}{(1-u^2)u^2} = -\int \frac{[u^2 - (u^2 - 1)]du}{(1-u^2)u^2}$$

$$= -\int \frac{u^2\,du}{(1-u^2)u^2} + \int \frac{(u^2-1)du}{(1-u^2)u^2}$$

$$= -\int \frac{du}{1-u^2} - \int \frac{du}{u^2} = \int \frac{du}{(u+1)(u-1)} + \frac{1}{u}$$

$$= \int \frac{A\,du}{u-1} + \int \frac{B\,du}{u+1} + \frac{1}{u}.$$

Se halla

$$A = \frac{1}{2} \quad \text{y} \quad B = -\frac{1}{2},$$

de donde

$$I = \frac{1}{2}\operatorname{Log}\frac{u-1}{u+1} + \frac{1}{u} = \frac{1}{2}\operatorname{Log}\left(\frac{\cos x - 1}{\cos x + 1}\right) + \frac{1}{\cos x} + C.$$

4.° *Calcular* $\int \frac{\operatorname{sen} 3x}{\operatorname{sen} x}\,dx.$

—Se tiene

$$I = \int \frac{(3 \operatorname{sen} x - 4 \operatorname{sen}^3 x)dx}{\operatorname{sen} x} = \int 3dx - 4 \int \operatorname{sen}^2 x \, dx$$

$$= 3x - 4 \int \left(\frac{1 - \cos 2x}{2}\right) dx = 3x - 2x + \int \cos 2x \cdot 2dx$$

$$= x + \operatorname{sen} 2x + C.$$

5.° *Calcular* $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen} 3x}{\operatorname{sen} 2x} dx.$

—Se tiene

$$I = \int \frac{(3 \operatorname{sen} x - 4 \operatorname{sen}^3 x)}{2 \operatorname{sen} x \cos x} dx = \int \frac{(3 - 4 \operatorname{sen}^2 x)dx}{2 \cos x}$$

$$= \int \frac{(3 - 3 \operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen}^2 x)dx}{2 \cos x} = \int \frac{3(1 - \operatorname{sen}^2 x) - \operatorname{sen}^2 x}{2 \cos x} dx$$

$$= \int \frac{(3 \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x)dx}{2 \cos x} = \frac{3}{2} \int \cos x \, dx - \frac{1}{2} \int \frac{(1 - \cos^2 x)dx}{\cos x}$$

$$= \frac{3}{2} \operatorname{sen} x - \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\cos x} + \frac{1}{2} \int \cos x \, dx$$

$$= 2 \operatorname{sen} x - \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\cos x} + C$$

que se sabe integrar.

CAPITULO IX

INTEGRACION POR UN DESARROLLO EN SERIE E INTEGRALES DIVERSAS

43. Principio. — Muy a menudo se puede desarrollar en serie de MAC-LAURIN la expresión a integrar, integrando a continuación cada término. Por supuesto que esto sólo tiene interés si la serie es convergente, es decir si la suma de todos sus términos no es infinita.

También se puede, en el caso de tener una potencia, desarrollar por la fórmula del binomio de NEWTON.

Ejemplos:

1.° *Calcular* $\int \sqrt[3]{x^3 + x + 1}\, dx.$

— Desarrollemos esta raíz cúbica en serie de MAC-LAURIN.

Tenemos

$$f(x) = (x^3 + x + 1)^{1/3} \qquad f(0) = 1$$

$$f'(x) = \frac{1}{3}(x^3 + x + 1)^{-2/3} \cdot (2x + 1) \qquad f'(0) = \frac{1}{3}$$

de donde

$$f(x) = 1 + x \cdot \frac{1}{3} + \ldots$$

luego

$$I = \int dx + \frac{1}{3}\int x\, dx + \quad . = x + \frac{x^2}{6} + \ldots + C.$$

2.° *Calcular* $\int_0^1 \frac{\operatorname{sen} x}{x}\, dx.$

— Se tiene

$$\operatorname{sen} x = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots$$

luego

$$I = \int_0^1 \left(1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} \dots\right) dx = \left[x - \frac{1}{3!}\frac{x^3}{3} + \frac{1}{5!}\frac{x^5}{5} + \dots\right]_0^1$$

expresión solamente aplicable en el intervalo de convergencia. Se tendría finalmente

$$I = 1 - \frac{1}{3 \cdot 3!} + \frac{1}{5 \cdot 5!} \dots \simeq 0{,}95.$$

3.° *Calcular* $\int_0^x e^{-x^2}\, dx.$

Esta integral se encuentra en el cálculo de probabilidades.

— Desarrollando en serie de MAC-LAURIN lo que no presenta ninguna dificultad, se encuentra

$$e^{-x^2} = 1 - \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \dots$$

Esta integral se encuentra en el cálculo de probabilidades.

— Desarrollando en serie de MAC-LAURIN, lo que no presenta ninguna dificultad, se encuentra

$$I = x - \frac{x^3}{3} + \frac{1}{2!}\frac{x^5}{5} - \frac{1}{3!}\frac{x^7}{7} + \dots$$

La función e^{-x^2} es una curva de campana (curva de GAUSS) que tiende a cero para $x = \pm\infty$, siendo continua e igual a 1 para $x = 0$. La integral representa, pues, la superficie $\int y\, dx$ entre la curva y el eje de las x. Si $x > 1$ por ejemplo $x = 2$ ó $x = 3$, se vería fácilmente la rápida convergencia de la serie; se obtiene finalmente el resultado siguiente, demostrando con detalle en el Tomo IV mediante una integral doble:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\, dx = \sqrt{\pi}.$$

44. Integrales de la forma $\int x^m(a + bx^n)^p dx$ *(con m y n enteros, n positivo y p cualquiera).*

Se integra por partes, siendo los cálculos un poco largos si el exponente m es elevado. También se puede a veces integrar por sustitución.

Ejemplos:

1.° *Cacular* $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{1-x^3}}$ o bien $\int x^3(1-x^2)^{-1/2}\,dx$.

— Se escribirá

$$I = -\frac{1}{2}\int x^2 \left(\frac{-2x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}\right),$$

hagamos

$$x^2 = u \qquad \text{de donde} \qquad du = 2x\,dx$$

$$\frac{-2x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = dv \qquad \text{y} \qquad v = 2\sqrt{1-x^2}$$

luego

$$I = -\frac{1}{2}\left[x^2 \cdot 2\sqrt{1-x^2} - \int 2\sqrt{1-x^2}\cdot 2x\,dx\right]$$

$$= -x^2\sqrt{1-x^2} - \int \sqrt{1-x^2}\,(-2x\,dx)$$

$$= -x^2\sqrt{1-x^2} - \frac{2}{3}(1-x^2)^{3/2} + C.$$

Hubiera podido hacerse

$$1 - x^2 = u^2$$

de donde

$$x = \sqrt{1-u^2} \qquad \text{luego} \qquad dx = \frac{-u\,du}{\sqrt{1-u^2}},$$

lo que da

$$I = \int \frac{(1-u^2)^{3/2}}{u}\left(-\frac{u\,du}{\sqrt{1-u^2}}\right) = -\int (1-u^2)du$$

$$= -u + \frac{u^3}{3} = -\sqrt{1-x^2} + -(1-x^2)^{3/2} + C.$$

Una transformación simple conduciría al resultado precedente.

2.° *Calcular* $\int x^3(2 + 3x^2)^{1/3}\,dx.$

—Resulta más conveniente hacer

$$2 + 3x^2 = u^3 \quad \text{de donde} \quad x = \left(\frac{u^3 - 2}{3}\right)^{1/2}$$

y

$$dx = \frac{1}{2}\left(\frac{u^3 - 2}{3}\right)^{-1/2} u^2\,du,$$

será pues

$$I = \int \left(\frac{u^3 - 2}{3}\right)^{3/2} u \cdot \frac{1}{2}\left(\frac{u^3 - 2}{3}\right)^{-1/2} u^2\,du$$

$$= \frac{1}{2}\int \left(\frac{u^3 - 2}{3}\right) u^3\,du = \frac{1}{6}\int (u^6 - 2u^3)du$$

$$= \frac{1}{6}\left[\frac{u^7}{7} - \frac{1}{2}u^4\right] = \frac{1}{6}\left[\frac{(2 + 3x^2)^{7/3}}{7} - \frac{(2 + 3x^2)^{4/3}}{2}\right] + C.$$

3.° *Sea* $\int \frac{dx}{x\sqrt{1 + x^2}}$

—Podemos hacer

$$x = \operatorname{tg}\varphi \quad \text{de donde} \quad dx = (1 + \operatorname{tg}^2\varphi)d\varphi.$$

lo que da

$$I = \int \frac{(1 + \operatorname{tg}^2\varphi)d\varphi}{\operatorname{tg}\varphi\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\varphi}} = \int \frac{\cos\varphi\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\varphi}}{\operatorname{sen}\varphi}\,d\varphi = \int \frac{d\varphi}{\operatorname{sen}\varphi}$$

que se sabe calcular.

Pero también podíamos haber hecho

$$x^2 + 1 = u^2$$

de donde

$$2x\,dx = 2u\,du$$

entonces

$$I = \int \frac{x\,dx}{x^2\sqrt{1 + x^2}} = \int \frac{u\,du}{(u^2 - 1)\sqrt{u^2}} = \int \frac{du}{u^2 - 1},$$

fracción racional que sabemos integrar y que da

$$I = \frac{1}{2}\,\mathrm{Log}\,\frac{u-1}{u+1} = \frac{1}{2}\,\mathrm{Log}\,\frac{\sqrt{x^3+1}-1}{\sqrt{x^3+1}+1}.$$

45. Integrales diversas.

1.° *Sea calcular* $\displaystyle\int \frac{x^3 dx}{x^4+x^2+1}$.

—Hagamos

$$x^3 = u \qquad \text{de donde} \qquad du = 2x\,dx$$

luego

$$I = \int \frac{x^3 \cdot \frac{1}{2}\,2x\,dx}{u^2+u+1} = \frac{1}{2}\int \frac{u\,du}{u^2+u+1}.$$

Hagamos aparecer en el numerador la diferencial del denominador

$$I = \frac{1}{4}\int \frac{(2u+1-1)du}{u^2+u+1} = \frac{1}{4}\left[\int \frac{(2u+1)du}{u^2+u+1} - \int \frac{du}{u^2+u+1}\right]$$

$$= \frac{1}{4}\left[\mathrm{Log}\,(u^2+u+1) - \int \frac{du}{\left(u+\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1-4}{4}\right)}\right]$$

$$= \frac{1}{4}\left[\mathrm{Log}\,(u^2+u+1) - \int \frac{dz}{z^2+\frac{3}{4}}\right] + C.$$

y la última integral da un arc tg.

2.° *Calcular*: $\displaystyle\int \frac{dx}{\mathrm{sen}^5 x}$

—La podemos escribir

$$\int \frac{\mathrm{sen}\,x\,dx}{\mathrm{sen}^6 x} = \int \frac{\mathrm{sen}\,x\,dx}{(1-\cos^2 x)^3} = -\int \frac{du}{(1-u^2)}$$

que se puede descomponer en seis fracciones racionales

$$-\frac{1}{(1-u^2)^3} = -\frac{1}{(1+u)^3(1-u)^3}$$

$$= \frac{A}{(1+u)^3} + \frac{B}{(1+u)^2} + \frac{C}{1+u} + \frac{D}{(1-u)^3} + \frac{E}{(1-u)^2} + \frac{F}{1-u}$$

de fácil integración.

También podemos escribir

$$I = -\int \frac{(1-u^2)+u^2}{(1-u^2)^3}\,du = -\int \frac{du}{(1-u^2)^2} - \int \frac{u^2\,du}{(1-u^2)^3}$$

$$= -\int \frac{[(1-u^2)+u^2]\,du}{(1-u^2)^2} - \int u \cdot \frac{u\,du}{(1-u^2)^2}$$

$$= -\int \frac{du}{1-u^2} - \int u \cdot \frac{u\,du}{(1-u^2)^2} + \frac{1}{2}\int u \cdot \left(\frac{-2u\,du}{(1-u^2)^2}\right).$$

Ahora bien, estas dos integrales, de la forma $u \cdot dv$ se integran por partes. Finalmente se halla

$$I = -\frac{\cos x(5 - 3\cos^2 x)}{8\,\mathrm{sen}^4 x} - \frac{3}{16}\,\mathrm{Log}\,\frac{1+\cos x}{1-\cos x} + C.$$

Podríamos también haber hecho

$$\mathrm{tg}\,\frac{x}{2} = t \qquad \text{de donde} \qquad dx = \frac{2dt}{1+t^2}$$

y

$$I = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\left(\frac{2t}{1+t^2}\right)^5} = \frac{1}{16}\int \frac{(1+t^2)^4}{t^5}\,dt$$

$$= \frac{1}{16}\int \frac{(1+4t^2+6t^4+4t^6+t^8)}{t^5}\,dt + C,$$

lo que dará cinco integrales de potencia.

3.° Calcular $\int x^4 \sqrt{1-x^2}\,dx.$

— Hagamos

$$x = \mathrm{sen}\,\varphi \qquad \text{de donde} \qquad dx = \cos\varphi\,d\varphi,$$

quedando

$$I = \int \operatorname{sen}^4 \varphi \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 \varphi} \cdot \cos \varphi \, d\varphi$$

$$= \int \operatorname{sen}^4 \varphi \cos^2 \varphi \, d\varphi = \int \operatorname{sen}^4 \varphi (1 - \operatorname{sen}^2 \varphi) d\varphi$$

$$= \int \operatorname{sen}^4 \varphi \, d\varphi - \int \operatorname{sen}^6 \varphi \, d\varphi + C.$$

lo cual sabemos integrar.

4.° *Calcular* $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}$

— Hagamos

$$x = \frac{1}{u} \qquad dx = -\frac{1}{u^2} du$$

y

$$I = \int \frac{-\frac{1}{u^2} du}{\frac{1}{u}\sqrt{1+\frac{1}{u^2}}} = -\int \frac{du}{\sqrt{u^2+1}}$$

$$= -\operatorname{Log}(u + \sqrt{u^2+1}) = \operatorname{Log} \frac{1}{u + \sqrt{u^2+1}}$$

$$= \operatorname{Log} \frac{1}{\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x^2}+1}} = \operatorname{Log} \frac{x}{1+\sqrt{1+x^2}} + C.$$

5.° *Calcular* $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}}$

— Hagamos

$$1 + e^x = u^2, \quad \text{de donde} \quad e^x dx = 2u \, du$$

y

$$I = \int \frac{2u \, du}{\frac{u^2-1}{\sqrt{u^2}}} = \int \frac{2du}{u^2-1},$$

fracción racional que sabemos integrar.

6.° *Calcular* $\int \frac{\text{Log } x\, dx}{1-x}$.

— Hagamos

$$1-x=u \qquad du=-dx,$$

de donde

$$I=-\int \frac{\text{Log } (1-u)du}{u};$$

se desarrolla Log $(1-u)$ en serie de MAC-LAURIN, se divide cada término por u y sólo nos quedan por integrar potencias de u.

7.° *Calcular* $\int \text{sen}^2 x\, dx$ y $\int \cos^2 x\, dx$.

Se puede calcular por un ingenioso método, escribiendo:

$$\left|\begin{array}{l} \cos^2 x\, dx + \int \text{sen}^2 x\, dx = \int (\cos^2 x + \text{sen}^2 x)dx = \int dx = x \\ \text{y} \\ \cos^2 x\, dx - \int \text{sen}^2 x\, dx = \int (\cos^2 x - \text{sen}^2 x)dx = \int \cos 2x\, dx = \frac{1}{2}\text{sen } 2x. \end{array}\right.$$

Sumemos miembro a miembro

$$2\int \cos^2 x\, dx = x + \frac{1}{2}\text{sen } 2x$$

y

$$\int \cos^2 x\, dx = \frac{x}{2} + \frac{1}{4}\text{sen } 2x$$

Restemos la segunda de la primera

$$2\int \text{sen}^2 x\, dx = x - \frac{1}{2}\text{sen } 2x$$

y

$$\int \text{sen}^2 x\, dx = \frac{x}{2} - \frac{1}{4}\text{sen } 2x.$$

NOTA. — Si hubiéramos de calcular

$$\int_0^T \text{sen}^2 \omega t\, dt \qquad \text{y} \qquad \int_0^T \cos^2 \omega t\, dt$$

donde T representa el período, puede operarse de otra manera.

Se puede observar que estas dos integrales son, evidentemente, iguales, puesto que la curva de un seno tiene la misma forma que la de un coseno. Cada una de ellas es, pues, igual a la mitad de la suma.

Calculemos, pues, su suma

$$\int_0^T \operatorname{sen}^2 \omega t\, dt + \int_0^T \cos^2 \omega t\, dt = \int_0^T (\operatorname{sen}^2 \omega t + \cos^2 \omega t) dt = \int_0^T dt = T.$$

Se tendrá así

$$\boxed{\int_0^T \operatorname{sen}^2 \omega t\, dt = \int_0^T \cos^2 \omega t\, dt = \frac{T}{2}}$$

resultado que debe retenerse en la memoria.

8.° *Calcular* $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$

— Indiquemos tres métodos. Podemos escribir:

1.° $\quad x = \dfrac{1}{u} \qquad dx = -\dfrac{1}{u^2}\, du$

o

2.° $\quad x = \dfrac{1}{\cos \varphi} \qquad dx = -\dfrac{1}{\cos^2 \varphi}\, (-\operatorname{sen} \varphi\, d\varphi)$

o

3.° $\quad x^2 - 1 = u^2 \qquad x = \sqrt{u^2+1} \qquad dx = \dfrac{u\, du}{\sqrt{u^2+1}},$

las integrales son entonces fáciles.

9.° *Calcular* $\displaystyle\int \frac{1+e^{2x}}{e^{6x}+e^{4x}}\, dx$

Pondríamos

$$e^{2x} = u \qquad \text{de donde} \qquad e^{2x} \cdot 2dx = du, \text{ etc.}$$

10. *Calcular* $\displaystyle\int \frac{(x-3)dx}{\sqrt{x-2}}$

Haríamos

$x - 2 = u^2$ de donde $dx = 2u\, du$, y $x - 3 = (u^2 + 2) - 3$, etc.

11. *Calcular* $\int \left(\frac{x+1}{x-1}\right) dx.$

Se haría la división de los dos polinomios, obteniéndose integrales simples.

12. *Calcular* $\int \frac{dx}{\operatorname{sen} x \cdot \cos^2 x}$

Se multiplica el numerador y el denominador por sen x, obteniéndose una fracción racional.

13. *Calcular* $\int \frac{dx}{(1-x)\sqrt{1-x^2}}$

Hacemos primeramente $x = \operatorname{sen} \varphi$, a continuación $t = \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}$, pero también puede emplearse el método siguiente.

Hagamos

$$x = \operatorname{sen} \varphi \qquad dx = \cos \varphi \, d\varphi$$

luego

$$I = \int \frac{\cos \varphi \, d\varphi}{(1 - \operatorname{sen} \varphi) \cos \varphi} = \int \frac{d\varphi}{1 - \operatorname{sen} \varphi}$$

Multipliquemos arriba y abajo por $1 + \operatorname{sen} \varphi$, de donde

$$I = \int \frac{(1 + \operatorname{sen} \varphi) d\varphi}{1 - \operatorname{sen}^2 \varphi} = \int \frac{(1 + \operatorname{sen} \varphi) d\varphi}{\cos^2 \varphi}$$

$$= \int \frac{d\varphi}{\cos^2 \varphi} - \int \frac{-\operatorname{sen} \varphi \, d\varphi}{\cos^2 \varphi} = \operatorname{tg} \varphi + \frac{1}{\cos \varphi}$$

$$= \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + C.$$

14. *Calcular* $\int \frac{x \operatorname{Log} x \, dx}{(1 + x^2)^2}$

— Integremos por partes:
hagamos

$$\operatorname{Log} x = u \qquad du = \frac{1}{x} dx,$$

y

$$dv = \frac{x \, dx}{(1 + x^2)^2} = \frac{1}{2} \frac{2x \, dx}{(1 + x^2)^2} \quad \text{de donde} \quad v = -\frac{1}{2(1 + x^2)}$$

y

$$I = -\frac{\operatorname{Log} x}{2(1+x^2)} + \int \frac{1}{2}\frac{1}{(1+x^2)} \cdot \frac{dx}{x}.$$

Para esta última, hagamos $x = \operatorname{tg}\varphi$, de donde

$$\int \frac{dx}{x(1+x^2)} = \int \frac{(1+\operatorname{tg}^2\varphi)d\varphi}{\operatorname{tg}\varphi(1+\operatorname{tg}^2\varphi)} = \int \frac{d\varphi}{\operatorname{tg}\varphi}$$

$$= \int \frac{\cos\varphi\, d\varphi}{\operatorname{sen}\varphi} = \operatorname{Log}\operatorname{sen}\varphi = \operatorname{Log}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}},$$

entonces

$$I = -\frac{\operatorname{Log} x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{2}\operatorname{Log}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + C.$$

15. *Calcular* $$\int \frac{(1-x^2)dx}{2x(1+x^2)}$$

Se puede escribir

$$I = \int \frac{(1+x^2-2x^2)dx}{2x(1+x^2)} = \int \frac{(1+x^2)dx}{2x(1+x^3)} - \int \frac{x\,dx}{1+x^2},$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x} - \frac{1}{2}\int \frac{2x\,dx}{1+x^2} = \frac{1}{2}\operatorname{Log} x - \frac{1}{2}\operatorname{Log}(1+x^2)$$

$$= \operatorname{Log}\sqrt{\frac{x}{1+x^2}} + C.$$

16. *Calcular* $$\int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\, dx.$$

— Hagamos

$$x = \cos\varphi \qquad dx = -\operatorname{sen}\varphi\, d\varphi,$$

luego

$$I = \int \sqrt{\frac{1+\cos\varphi}{1-\cos\varphi}}\, dx = \int \sqrt{\frac{2\cos^2\frac{\varphi}{2}}{2\operatorname{sen}^2\frac{\varphi}{2}}} \cdot (-\operatorname{sen}\varphi\, d\varphi)$$

$$= -\int \frac{\cos\frac{\varphi}{2}}{\operatorname{sen}\frac{\varphi}{2}} \cdot 2\operatorname{sen}\frac{\varphi}{2} \cdot \cos\frac{\varphi}{2}\, d\varphi = -4\int \cos^2\frac{\varphi}{2} \cdot \frac{d\varphi}{2}$$

$$= -4\int \left(\frac{1+\cos\varphi}{2}\right)\frac{d\varphi}{2} = -\int d\varphi - \int \cos\varphi\, d\varphi$$

$$= -\varphi - \operatorname{sen}\varphi = -\operatorname{arc}\cos x - \sqrt{1-x^2} + C.$$

17. *Calcular* $\int \cos\theta \sqrt{\cos 2\theta}\, d\theta$

— Reemplacemos $\cos 2\theta$ por $1 - 2\operatorname{sen}^2\theta$, de donde

$$I = \int \sqrt{1 - 2\operatorname{sen}^2\theta} \cdot \cos\theta\, d\theta,$$

y hagamos

$$2\operatorname{sen}^2\theta = \operatorname{sen}^2\varphi. \qquad \text{luego} \qquad \sqrt{2}\cos\theta\, d\theta = \cos\varphi\, d\varphi$$

entonces queda

$$I = \int \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2\varphi} \cdot \frac{\cos\varphi}{\sqrt{2}}\, d\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}\int \cos^2\varphi\, d\varphi + C.$$

que sabemos integrar.

18. *Calcular* $\int \frac{\cos 2x}{\cos^4 x}\, dx$

— Reemplacemos $\cos 2x$ en función de $\operatorname{tg} x$, y lo mismo para $\cos^4 x$, luego

$$I = \int \frac{\frac{1-\operatorname{tg}^2 x}{1+\operatorname{tg}^2 x}\, dx}{\left(\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x}}\right)^4} = \int \frac{(1-\operatorname{tg}^2 x)(1+\operatorname{tg}^2 x)^2}{1+\operatorname{tg}^2 x}\, dx$$

$$= \int (1-\operatorname{tg}^2 x)(1+\operatorname{tg}^2 x)dx.$$

Hagamos entonces

$$\operatorname{tg} x = t, \qquad \text{luego} \qquad dx = \frac{dt}{1+t^2},$$

entonces queda

$$I = \int (1-t^2)(1+t^2)\frac{dt}{1+t^2} = \int (1-t^2)dt = t - \frac{t^3}{3} = \operatorname{tg} x - \frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x + C.$$

19. *Calcular*
$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{+\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos x \sqrt{\cos 2x}}$$

—Lo mismo que anteriormente, expresemos todo en función de $\operatorname{tg} x = t$; se tendrá

$$I = \int \frac{dx}{\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\sqrt{\frac{1-t^2}{1+t^2}}} \qquad \left(\cos x = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}\right)$$

$$= \int \frac{\frac{dt}{1+t^2}}{\frac{\sqrt{1-t^2}}{1+t^2}} = \int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \operatorname{arc\,sen} t$$

$$= \left[\operatorname{arc\,sen}\operatorname{tg} x\right]_{-\frac{\pi}{4}}^{+\frac{\pi}{4}} = \operatorname{arc\,sen}\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} - \operatorname{arc\,sen}\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right)$$

$$= \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi.$$

20. *Calcular*
$$\int_0^1 x\sqrt{1-x^2}\,dx.$$

—Hagamos

$$\sqrt{1-x^2} = u \qquad \text{de donde} \qquad du = \frac{-x\,dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

y se puede escribir

$$I = \int (1-x^2)\cdot\frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\int u^2\cdot du = -\frac{u^3}{3}$$

$$= -\frac{1}{3}\left[(\sqrt{1-x^2})^3\right]_0^1 = -\frac{1}{3}\left[0-1\right] = +\frac{1}{3}$$

Podríamos también poner $x = \operatorname{sen}\varphi$.

21. *Calcular* $$\int \frac{x^4 - 3x^3 + 1}{(x-2)^3}\,dx.$$

— Tenemos una fracción racional. Por ello, lo primero que se ocurre es dividir el numerador por el denominador, pero es más sencillo hacer

$$x - 2 = u \qquad \text{de donde} \qquad du = dx$$

luego

$$I = \int \frac{(u+2)^4 - 3(u+2)^3 + 1}{u^3}\,du$$

desarrollando y dividiendo cada término por u^3 se obtienen integrales de potencia de fácil resolución.

Se ve así que jamás debe complicarse un denominador.

22. *Calcular* $$\int x \cdot \cos^2 x\,dx.$$

— Reemplacemos $\cos^2 x$ por $\dfrac{1 + \cos 2x}{2}$, de donde

$$I = \int x \left(\frac{1 + \cos 2x}{2}\right) dx = \frac{1}{2}\int x\,dx + \frac{1}{4}\int x \cdot \cos 2x \cdot 2dx$$

se integra esta última por partes, hallándose

$$I = \frac{x^2}{4} + \frac{x}{4}\operatorname{sen} 2x + \frac{1}{8}\cos 2x + C.$$

23. *Calcular* $$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 dx}{x^4 + 1}.$$

— Se puede, evidentemente, integrar de 0 a ∞ y duplicar. Pero

$$x^4 + 1 = (x^2 + 1)^2 - 2x^2 = (x^2 + x\sqrt{2} + 1)(x^2 - x\sqrt{2} + 1).$$

Se tendrá pues

$$\frac{x^2}{x^4 + 1} = \frac{x^2}{(x^2 + x\sqrt{2} + 1)(x^2 - x\sqrt{2} + 1)} \equiv \frac{Ax + B}{x^2 + x\sqrt{2} + 1} + \frac{Cx + D}{x^2 - x\sqrt{2} + 1}.$$

Quitando denominadores e identificando se halla

$$A = -\frac{1}{2\sqrt{2}} \qquad C = \frac{1}{2\sqrt{2}} \qquad B = D = 0.$$

Queda

$$I = 2\left[\frac{1}{2\sqrt{2}}\int_0^\infty \frac{x\,dx}{x^2 - x\sqrt{2} + 1} - \frac{1}{2\sqrt{2}}\int_0^\infty \frac{x\,dx}{x^2 + x\sqrt{2} + 1}\right]$$

desarrollando cada una de ellas, es decir, haciendo aparecer en los numeradores la diferencial de los denominadores, se halla, finalmente

$$I = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\frac{1}{2}\operatorname{Log}\frac{x^2 - x\sqrt{2} + 1}{x^2 + x\sqrt{2} + 1} + \operatorname{arc\,tg}(x\sqrt{2} - 1) + \operatorname{arc\,tg}(x\sqrt{2} + 1)\right]_0^\infty$$

el logaritmo neperiano se anula en los dos límites, y queda

$$I = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4}\right] = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

24. *Calcular* $$\int_0^{2\pi} \frac{dx}{\operatorname{sen}^4 x + \cos^4 x}$$

— Podríamos poner $\operatorname{tg} x = t$, pero es más sencillo escribir

$$\operatorname{sen}^4 x + \cos^4 x = (\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x)^2 - 2\operatorname{sen}^2 x \cdot \cos^2 x$$

$$= 1 - 2\operatorname{sen}^2 x \cdot \cos^2 x = 1 - \frac{1}{2}\operatorname{sen}^2 2x.$$

Hagamos entonces

$$\operatorname{tg} 2x = t \qquad \text{de donde} \qquad dx = \frac{1}{2}\frac{dt}{1 + t^2}$$

con

$$\operatorname{sen}^2 2x = \frac{t^2}{1 + t^2}$$

luego

$$I = \int \frac{\dfrac{dt}{2(1 + t^2)}}{1 - \dfrac{1}{2}\dfrac{t^2}{1 + t^2}} = \int \frac{dt}{2 + t^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arc\,tg} \frac{t}{\sqrt{2}}$$

¿Cuáles son los nuevos límites?

$$\text{para} \quad x = 0 \quad \operatorname{tg} 2x = 0 \quad \text{y} \quad t = 0$$

y

$$\text{para} \quad x = 2\pi \quad \operatorname{tg} 2x = 0 \quad \text{y} \quad t = 0.$$

Se puede, pues, hacer variar x de 0 a π y duplicar la integral; también puede hacerse variar x de 0 a $\frac{\pi}{4}$ y multiplicar por 8, ya que, en efecto, $\operatorname{sen}^4 x + \cos^4 x$ no cambia de valor cuando se cambia x, sea en $2\pi - x$, sea en $\pi - x$, sea en $\pi + x$; y los nuevos límites de t son:

para $\quad x = 0 \qquad t = 0$

para $\quad x = \frac{\pi}{4} \qquad \operatorname{tg} 2x = \infty \qquad t = \infty.$

Se tendrá pues

$$I = 8 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\operatorname{arc\,tg} \frac{t}{\sqrt{2}} \right]_0^{\infty} = \frac{8}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\pi}{2} = 2\pi\sqrt{2}.$$

25. *Calcular* $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{3 + \cos x}$

— Hagamos

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t \quad \text{de donde} \quad dx = \frac{2dt}{1 + t^2}$$

luego

$$I = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{3 + \frac{1-t^2}{1+t^2}} = \int \frac{2dt}{3(1+t^2) + 1 - t^2} = \int \frac{dt}{2 + t^2}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arc\,tg} \frac{t}{\sqrt{2}}$$

Para $\quad x = 0 \qquad t = 0$

y para $\quad x = \frac{\pi}{2} \qquad t = 1,$

de donde

$$I = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\operatorname{arc\,tg} \frac{t}{\sqrt{2}} \right]_0^1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{\sqrt{2}} = 0{,}43.$$

26. *Calcular* $\displaystyle\int \frac{dx}{(1-x^3)\sqrt{1-x^3}}$

— Hagamos

$$x = \operatorname{sen}\varphi, \qquad dx = \cos\varphi\, d\varphi$$

de donde

$$I = \int \frac{\cos\varphi\, d\varphi}{(1-\operatorname{sen}^2\varphi)\sqrt{1-\operatorname{sen}^3\varphi}} = \int \frac{d\varphi}{\cos^2\varphi} = \operatorname{tg}\varphi = \frac{x}{\sqrt{1-x^3}} + C.$$

27. *Calcular* $\displaystyle\int \frac{dx}{x+\sqrt[3]{x}}$

— Hagamos

$$x = u^3 \qquad \text{de donde} \qquad du = 3u^2 du,$$

luego

$$I = \int \frac{3u^2 du}{u^3+u} = \int \frac{3u\, du}{1+u^2} = \frac{3}{2}\operatorname{Log}(1+x^{2/3}) + C$$

28. *Calcular* $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1-x}{1-x^3}\, dx.$

El denominador $1-x^3$ tiene, evidentemente, como raíz $x=1$, y la división de $1-x^3$ por $1-x$ es, pues, exacta, quedando

$$\frac{1-x^3}{1-x} = 1 + x + x^2.$$

Se tendrá

$$I = \int_0^\infty \frac{(1-x)dx}{(1-x)(1+x+x^2)} = \int_0^\infty \frac{dx}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} = \frac{2}{\sqrt{3}}\left[\operatorname{arc\,tg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right]_0^\infty$$

Si x varía de 0 a ∞, $\dfrac{2x+1}{\sqrt{3}}$ varía de $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ a ∞ y el arco varía de $\dfrac{\pi}{6}$ a $\dfrac{\pi}{2}$, de donde

$$I = \frac{2}{\sqrt{3}}\left[\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\right] = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}.$$

29. *Calcular* $\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{(x-1)(2-x)}}$

Podría desarrollarse y descomponer el trinomio en forma canónica, pero indiquemos otro procedimiento.

Hagamos

$$\frac{x-1}{2-x} = u^2 \qquad \text{luego} \qquad dx = \frac{2u\,du}{(1+u^2)^2},$$

y se tiene

$$\sqrt{(x-1)(2-x)} = \frac{u}{1+u^2}.$$

Busquemos los nuevos límites:

para $x = 1$ $u = 0$

y para $x = 2$ $u = \infty$.

S etendrá pues

$$I = \int_0^\infty \frac{\frac{2u\,du}{(1+u^2)^2}}{\frac{u}{1+u^2}} = \int_0^\infty \frac{2du}{1+u^2} = 2\left[\operatorname{arc\,tg} u\right]_0^\infty = 2\cdot\left[\frac{\pi}{2} - 0\right] = \pi$$

30. *Calcular* $\int \frac{dx}{\operatorname{sen} x \cdot \cos^2 x}$

— Indiquemos otro procedimiento distinto al empleado en el ejemplo 12. Reemplacemos $\frac{1}{\cos^2 x}$ por $1 + \operatorname{tg}^2 x$, lo que dará dos integrales:

$$I = \int \frac{(1+\operatorname{tg}^2 x)dx}{\operatorname{sen} x} = \int \frac{dx}{\operatorname{sen} x} + \int \frac{\operatorname{tg}^2 x\,dx}{\operatorname{sen} x}$$

$$= \operatorname{Log}\operatorname{tg}\frac{x}{2} + \int \frac{\operatorname{sen} x\,dx}{\cos^2 x} = \operatorname{Log}\operatorname{tg}\frac{x}{2} + \frac{1}{\cos x} + C$$

SEGUNDA PARTE

APLICACIONES DE LAS INTEGRALES

Estudiaremos las aplicaciones siguientes:

1.° Cálculo del valor medio de una función y del valor eficaz (con aplicación a la corriente eléctrica alterna);

2.° Cálculo de las superficies de curvas;

3.° Líneas trigonométricas hiperbólicas y sus aplicaciones;

4.° Cálculo de longitudes de curvas;

5.° Cálculo de volúmenes de sólidos de revolución;

6.° Cálculo de superficies laterales de volúmenes de revolución;

8.° Cálculo de los momentos de inercia (en el Tomo IV);

9.° Aplicaciones diversas a electricidad, óptica, mecánica y radio (ver Tomo IV).

NOTA. — Las aplicaciones que utilizan las ecuaciones diferenciales se hallarán en el Tomo V.

CAPITULO X

CALCULO DE LOS VALORES MEDIOS

46. Cálculo del valor medio de una función. — Sea una función cualquiera $y = f(x)$ representada por una curva (fig. 18), y supongamos, por el momento, que la función sea continua y no corte al eje de las x. Se trata de calcular el valor medio de la función y.

Todo el mundo tiene clara la noción de la media.

Así, por ejemplo, supongamos que se pide la edad media de los alumnos de una clase: se sumarían las edades de todos los alumnos y, dividiendo el total por el número de alumnos, se tendría la edad media.

Pues bien, *el valor medio de nuestra función* $y = f(x)$, *es decir la altura media de todas las ordenadas, desde* $x = a$ *hasta* $x = b$, *es por definición la altura* H *de un rectángulo, de longitud* $b - a$, *y que tuviera la misma superficie que la comprendida entre la curva y el eje de las* x.

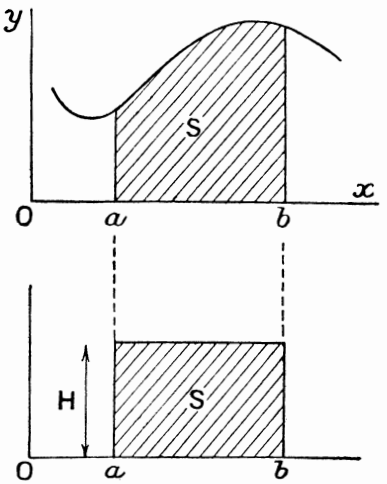


FIG. 18

La superficie de la curva es (ver al principio de las integrales):

$$S = \int_a^b y \cdot dx$$

y la superficie del rectángulo es $S = H(b - a)$. Se tendrá pues

$$H(b - a) = \int_a^b y\, dx$$

de donde

$$\boxed{\text{H} = \text{Valor medio de } y = \frac{1}{b-a}\int_a^b y\,dx}$$

— Se puede ver, por otra parte, que esta fórmula del valor medio de una función no es más que una generalización de la noción de media aritmética.

En efecto, dividamos el intervalo $b-a$ en n partes iguales, siendo las ordenadas correspondientes a las diferentes abscisas

$$y_1 \quad y_2 \quad y_3 \ldots y_n,$$

si n es más grande, se puede considerar que la superficie de la curva está dividida en pequeños rectángulos, cuya superficie total será

$$\text{S} = \frac{b-a}{n}\cdot y_1 + \frac{b-a}{n}\cdot y_2 + \ldots = \frac{b-a}{n}(y_1 + y_2 + y_3 + \ldots)$$

de donde se deduce

$$\frac{n\text{S}}{b-a} = y_1 + y_2 + y_3 + \ldots + y_n,$$

y, para tener la *media aritmética* de todas estas ordenadas, basta con dividir por el número total de intervalos, o sea n, lo que da

$$\frac{y_1 + y_2 + y_3 \ldots + y_n}{n} = \frac{\text{S}}{b-a}.$$

Pasemos al límite, cuando n tiende a infiinito: el número de rectángulos tenderá también a infinito y el miembro de la izquierda dará la altura media de todas las ordenadas. Pero, en el miembro de la derecha, la superficie S de todos estos rectángulos tiende a ser la superficie exacta comrendida entre la curva y el eje de las x, es decir que S tiende hacia

$$\int_a^b y\,dx$$

Se tendrá, pues, en el límite, para $n = \infty$:

$$\text{valor medio de las ordenadas} = \frac{1}{b-a}\int_a^b y\,dx$$

que coincide con la fórmula dada anteriormente.

Ejemplo. — *Sea la parábola* $y = 3x^2$ *de eje vertical. Calcular su valor medio desde* $x = 0$ *hasta* $x = 2$.

— Se tendrá

$$y_{\text{media}} = \frac{1}{2-0}\int_0^2 y \cdot dx = \frac{1}{2}\int_0^2 3x^2 dx = \frac{3}{2}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^2 = \frac{1}{2}[2^3 - 0] = 4.$$

Por tanto, 4 es la altura del rectángulo que tuviera la misma superficie que la comprendida entre la parábola y el eje de las x, desde $x = 0$ hasta $x = 2$.

Caso en que la función se anula en el intervalo (ab) (fig. 19). — La superficie de la curva de a a c es positiva puesto que y es positiva, la de c a b es negativa por serlo y en este intervalo. Si se integra de a a b, se tendrá entonces *la diferencia* de las dos superficies; llamémosla S:

$$S = \int_a^b y\,dx = (\text{superficie de } a \text{ a } c) - (\text{superficie de } c \text{ a } b).$$

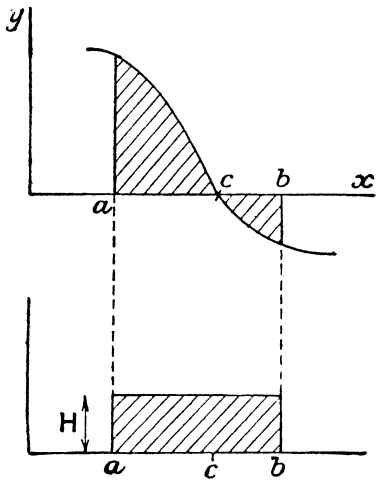


FIG. 19

Pero el valor medio de la función y está evidentemente dado por la misma fórmula que hemos visto anteriormente, ya que es la altura de un rectángulo, de longitud $b - a$ y que tuviera como superficie S, o sea la diferencia de dos superficies. Esto se ajusta perfectamente a la definición y a la noción del valor medio de una cantidad variable, que puede ser positiva o negativa.

47. Aplicación a una función sinusoidal (fig. 20). — *Sea la función* $y = \operatorname{sen} x$, *donde* x *varía de* 0 a 2π.

Por razón de simetría, al tener las dos mitades de la curva la misma superficie, el valor medio debe ser nulo. Hagámosle nulo:

$$y_{\text{media}} = \frac{1}{2\pi - 0}\int_0^{2\pi} \operatorname{sen} x\,dx = \frac{1}{2\pi}(-\cos x)_0^{2\pi}$$

$$= -\frac{1}{2\pi}[\cos 2\pi - \cos 0] = -\frac{1}{2\pi}[1 - 1] = 0.$$

Caso de la corriente eléctrica alterna.

Primer caso: Corriente no rectificada

$$i = \mathrm{I} \operatorname{sen} \omega t.$$

—Según lo que acabamos de ver, el valor medio es nulo. Por otra parte, en lugar de integrar entre 0 y 2π, se puede hacer de 0 a T (siendo T el período), ya que la variable es ahora el tiempo t; igualando las dos superficies, la del rectángulo y la de la curva, se obtiene:

$$\mathrm{I}_{\text{media}} \cdot \mathrm{T} = \int_0^{\mathrm{T}} \mathrm{I} \operatorname{sen} \omega t \cdot dt \qquad \left(\text{donde } \omega = \frac{2\pi}{\mathrm{T}}\right)$$

de donde

$$\mathrm{I}_{\text{media}} = \frac{1}{\mathrm{T}} \int_0^{\mathrm{T}} \mathrm{I} \operatorname{sen} \omega t \cdot dt = -\frac{\mathrm{I}}{\mathrm{T}\omega} [\cos \omega t]_0^{\mathrm{T}}$$

$$= -\frac{\mathrm{I}}{\mathrm{T}\omega}\left[\cos \frac{2\pi}{\mathrm{T}} \cdot \mathrm{T} - \cos 0\right] = -\frac{\mathrm{I}}{\mathrm{T}\omega} (\cos 2\pi - \cos 0) = 0.$$

Un amperímetro de cuadro móvil, que es sensible a la corriente media, no se desviará (lo mismo ocurre con un voltímetro a cuadro móvil), lo que es evidente «*a priori*».

Hay que hacer constar que $i \cdot dt$ es la cantidad de culombios transportada en un tiempo dt, y la integral $\int \mathrm{I} \operatorname{sen} \omega t \cdot dt$, de 0 a T, es la cantidad de culombios suministrada durante un período.

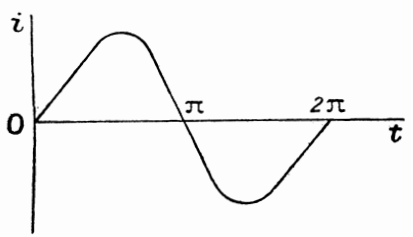


FIG. 20

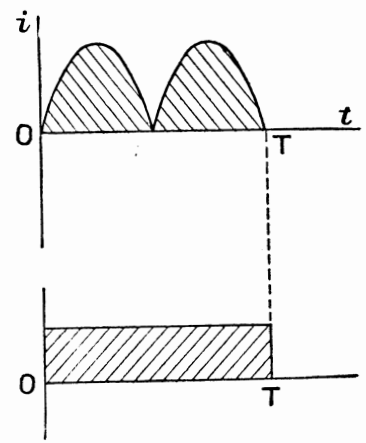


FIG. 21

Segundo caso: Corriente rectificada en dos alternancias (fig. 21).

— Aquí no se conoce la ecuación de la curva durante un período, sino solamente durante un semiperíodo:

$$i = I \cdot \operatorname{sen} \omega t.$$

Bastará con integrar de 0 a $\frac{T}{2}$ y después duplicar.

Durante un tiempo dt, la cantidad de electricidad es $i\,dt$, y durante un período será:

$$Q = 2\int_0^{\frac{T}{2}} i\,dt.$$

Igualemos, pues, esta cantidad de electricidad a la suministrada por una corriente continua cuya intensidad es I_{media}:

$$I_{media} \cdot T = 2\int_0^{\frac{T}{2}} i\,dt$$

de donde

$$I_{media} = \frac{2}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} I \operatorname{sen} \omega t\,dt$$

$$= -\frac{2I}{T\omega}\left[\cos \omega t\right]_0^{\frac{T}{2}} = -\frac{2I}{T \cdot \frac{2\pi}{T}}\left[\cos \frac{2\pi}{T} \cdot \frac{T}{2} - \cos 0\right]$$

$$= -\frac{I}{\pi}[-1-1] = \frac{2I}{\pi}$$

$$\boxed{I_{media} = \frac{2I}{\pi}}$$

Esto es lo que indicará un amperímetro a cuadro móvil.

Tercer caso: Corriente rectificada a una alternancia (fig. 22).

—La cantidad de electricidad, expresada en culombios, es la mitad, por lo que la corriente media será la mitad de la precedente, es decir $\frac{I}{\pi}$. Sin embargo, se puede calcular descomponiendo la integral en dos:

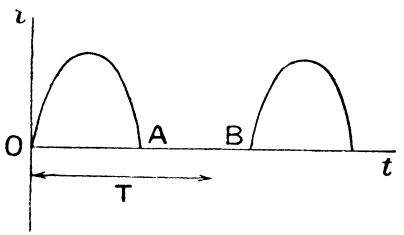


FIG. 22

$$I_{media} = \frac{1}{T}\left[\int_0^{\frac{T}{2}} i\,dt + \int_{\frac{T}{2}}^{T} i\,dt\right]$$

pero la segunda integral es nula por serlo i, luego queda

$$I_{media} = \frac{1}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} I \operatorname{sen} \omega t\,dt = -\frac{I}{T\omega}\left[\cos \omega t\right]_0^{\frac{T}{2}}$$

$$= -\frac{I}{T \cdot \frac{2\pi}{T}}\left[\cos \frac{2\pi}{T} \cdot \frac{T}{2} - \cos 0\right] = -\frac{I}{2\pi}[-1-1] = \frac{I}{\pi}.$$

NOTA. — Todo lo que acabamos de decir, en los tres casos, sobre las corrientes, se aplica también sin ninguna modificación a las fuerzas electromotrices y a las diferenciales de potencial, rectificadas o no.

48. Cálculo del valor eficaz de una corriente alterna. — Se sabe que, en electricidad, se llama valor eficaz de una corriente alterna $i = I \operatorname{sen} \omega t$ a la intensidad de la corriente continua que, durante el mismo tiempo (por ejemplo un período T), y en la misma resistencia R, disipa la misma cantidad de calor.

La cantidad de calor (en julios) disipada por esta corriente continua es, según la ley de JOULE:

$$W = RI^2_{ef.}\,T.$$

Calculemos la cantidad de calor disipada por la corriente alterna durante un período T.

En un tiempo dt la energía disipada de

$$dW = Ri^2\,dt = RI^2 \cdot \operatorname{sen}^2 \omega t\,dt$$

y la energía total (en julios) será

$$W = \int_0^T RI^2 \operatorname{sen}^2 \omega t \, dt = RI^2 \int_0^T \left(\frac{1 - \cos 2\omega t}{2}\right) dt$$

$$= RI^2 \left[\int_0^T \frac{dt}{2} - \frac{1}{4\omega} \int_0^T \cos 2\omega t \cdot 2\omega \, dt\right]$$

$$= RI^2 \left[\frac{T}{2} - \frac{1}{4\omega} (\operatorname{sen} 2\omega t)_0^T\right].$$

Ahora bien, ya hemos visto que la integral entre 0 y T de un seno o de un coseno es siempre nula, *cualquiera que sea el valor del período*; queda entonces

$$W = RI^2 \cdot \frac{T}{2}.$$

Igualando las dos energías, se obtiene

$$RI^2_{ef.} \cdot T = RI^2 \cdot \frac{T}{2}$$

de donde

$$\boxed{I_{ef.} = \frac{I_{max}}{\sqrt{2}}}$$

Igualmente se tendría para la d.d.p.

$$V_{ef.} = \frac{I_{max}}{\sqrt{2}}.$$

NOTA. — Para el caso de corriente en que se rectifican las dos alternancias, la corriente eficaz tiene el mismo valor, pues la cantidad de calor es la misma. En efecto, la cantidad de calor no depende del sentido de la corriente.

Caso de corriente rectificada en una alternancia (fig. 22). — No se conoce la ecuación de la corriente en un período, pero puede dividirse en dos la integral precedente, una de 0 a $\frac{T}{2}$ y la otra de $\frac{T}{2}$ a T,

y esta última es nula por serlo la corriente. Se tendrá, pues, llamando I′ a la corriente eficaz:

$$RI'^2T = \int_0^{\frac{T}{2}} Ri^2\,dt = \int_0^{\frac{T}{2}} RI^2 \cdot \operatorname{sen}^2 \omega t\,dt$$

$$= RI^2 \left[\int_0^{\frac{T}{2}} \frac{dt}{2} - \frac{1}{4\omega}\int_0^{T} \cos 2\omega t \cdot 2\omega\,dt\right]$$

$$= RI^2 \cdot \left[\frac{T}{4} - 0\right] = RI^2\frac{T}{4}$$

de donde

$$I' = \frac{I_{max}}{2} \qquad \text{o bien} \qquad \frac{I_{ef.}}{\sqrt{2}}.$$

así, la corriente eficaz no es la mitad de la corriente eficaz en el caso en que se rectifican las dos alternancias.

Se hubiera podido evitar esta integral diciendo que la cantidad de calor disipada es la mitad de la que disipa la corriente a dos alternancias; es decir, expresada en julios vale:

$$RI'^2T = \frac{1}{2}RI^2_{ef.} \cdot T$$

de donde

$$I' = \frac{I_{ef.}}{\sqrt{2}}.$$

CAPITULO XI

CALCULO DE LAS SUPERFICIES

49. Caso en que la curva está expresada en la forma $y = f(x)$. — Hemos visto al principio de las integrales que, si se tiene una curva cuya ecuación es $y = f(x)$, la superficie comprendida entre la curva, el eje de las x, y dos ordenadas cuyas abscisas son a y b, es

$$\boxed{S = \int_a^b y \cdot dx}$$

Hemos visto, por otra parte, que hay que tomar precauciones en el caso en que la curva corte al eje de las x (una o varias veces) entre los dos límites a y b, o bien en el caso en que la función se haga infinita en el intervalo. Por eso, antes de integrar, es preciso trazar la curva, al menos en el intervalo de a a b.

Hagamos algunos ejemplos.

Ejemplos:

1.° *Superficie de la parábola* $y^2 = 2x$, desde $x = 0$ a $x = 1$.

— Se tiene

$$S = \int_0^1 \sqrt{2x}\, dx = \sqrt{2} \cdot \frac{2}{3} \left[x^{3/2}\right]_0^1 = \frac{2\sqrt{2}}{3} [1 - 0] = \frac{2\sqrt{2}}{3} = \frac{2}{3}\sqrt{2},$$

pero $\sqrt{2}$ es la ordenada y cuya abscisa es 1; la superficie es, pues, los $\frac{2}{3}$ de la superficie del rectángulo de base 1 y de altura $\sqrt{2}$.

2.° *Sea calcular la superficie de la curva*

$$y = x^2 - 5x + 6$$

cuando y es negativa.

—La figura 23 muestra la curva de este trinomio, cuyas raíces son 2 y 3, siendo negativo entre ellas.

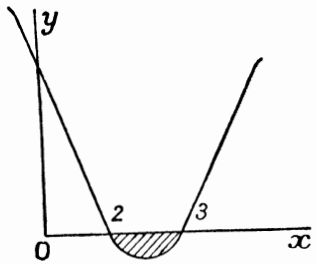


FIG. 23

Se tendrá pues

$$S = \int_2^3 y\,dx = \int_2^3 (x^2 - 5x + 6)dx$$

$$= \left[\frac{x^3}{3}\right]_2^3 - 5\left[\frac{x^2}{2}\right]_2^3 + 6\left[x\right]_2^3$$

$$= \frac{1}{3}[27 - 8] - \frac{5}{2}[9 - 4] + 6[3 - 2] = -\frac{1}{6}.$$

Integremos de 0 a 2 para tener la superficie de la curva entre estos puntos:

$$S = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^2 - 5\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^2 + 6\left[x\right]_0^2$$

$$= \frac{8}{3} - 10 + 12 = \frac{28}{6}.$$

Integremos ahora de 0 a + 3, y deberemos hallar:

$$-\frac{1}{6} + \frac{28}{6} = \frac{27}{6},$$

es decir, la diferencia de las dos superficies:

$$S = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^3 - 5\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^3 + 6\left[x\right]_0^3$$

$$= \frac{27}{3} - \frac{45}{2} + 18 = \frac{27}{6}.$$

como debe ocurrir.

3.° *Superficie de un círculo.*

— La ecuación de la circunferencia, de centro el origen, es

$$x^2 + y^2 = R^2$$

de donde

$$y = \sqrt{R^2 - x^2}.$$

Calculemos para un cuarto de círculo y multipliquemos por 4, variando x entre 0 y R:

$$S = 4\int_0^R y\,dx = 4\int_0^R \sqrt{R^2 - x^2}\,dx.$$

Hagamos

$$x = R \operatorname{sen} \varphi \qquad dx = R \cos \varphi\, d\varphi,$$

lo que da

$$S = 4\int \sqrt{R^2(1 - \operatorname{sen}^2 \varphi)} \cdot R \cos \varphi\, d\varphi$$

$$= 4R^2 \int \cos^2 \varphi\, d\varphi = 4R^2 \int \left(\frac{1 + \cos 2\varphi}{2}\right) d\varphi$$

$$= 2R^2 \left[\varphi + \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2\varphi\right] = 2R^2 \left[\operatorname{arc\,sen} \frac{x}{R} + \frac{1}{2} 2 \operatorname{sen} \varphi \cos \varphi\right].$$

Pongamos ahora φ en función de x, volviendo a los límites iniciales:

$$S = 2R^2 \left[\operatorname{arc\,sen} \frac{x}{R} + \frac{x}{R}\sqrt{1 - \frac{x^2}{R^2}}\right]_0^R$$

$$= 2R^2 \left[\frac{\pi}{2} - 0\right] = \pi R^2.$$

4.° *Superficie de la elipse*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

donde a y b son los semiejes.

— Se tiene

$$\frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{x^2}{a^2} \qquad \text{e} \qquad y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}.$$

Calculemos la superficie de un cuarto de elipse (x variará entre 0 y a), y multipliquemos por 4:

$$S = 4\int_0^a y\,dx = 4\int_0^a \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}\,dx.$$

Ponemos $x = a \operatorname{sen} \varphi$ y se halla, como anteriormente, un $\cos^2 \varphi$. Finalmente se obtiene

$$S = \pi ab.$$

Se observa que, si $b = a$, se tiene un círculo, y $S = \pi a^2$.

5.° *Superficie de la sinusoide* $y = \operatorname{sen} x$.

— Calculemos la superficie desde $x = 0$ hasta $x = \pi$:

$$S = \int_0^\pi \operatorname{sen} x\,dx = -\Big[\cos x\Big]_0^\pi = -[\cos \pi - \cos 0] = -[-1 - 1] = +2,$$

es decir, que si el ancho del arco de la sinusoide es igual a 3,14 cm y la altura máxima 1 cm, la superficie es de 2 cm^2.

6.° *Superficie de la curva* $y = e^x$ *de* $-\infty$ *a* 0.

— Se tiene

$$S = \int_{-\infty}^0 y\,dx = \int_{-\infty}^0 e^x\,dx = \Big[e^x\Big]_{-\infty}^0 = 1 - e^{-\infty} = 1$$

se obtiene un curioso resultado *a priori*: esta superficie no es infinita.

7.° *Hallar la superficie comprendida entre la curva* $y = x^2$ *y la recta* $y = 4x$ (fig. 24).

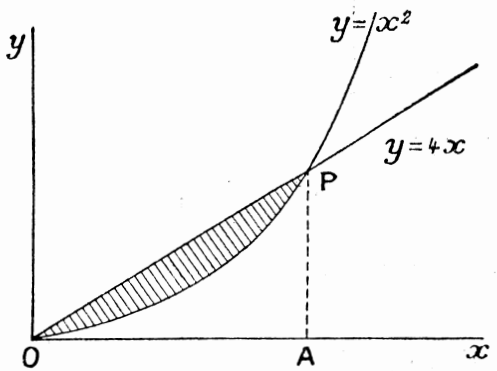


FIG. 24

—Hay que conocer la abscisa del punto de cruce: en este punto las dos ordenadas son iguales

$$x^2 = 4x \qquad \text{de donde} \qquad x = 4 \ (\text{e } y_P = 16).$$

La superficie buscada es la diferencia entre la del triángulo OAP y la comprendida entre la curva $y = x^2$ y el eje de las x, de 0 a 4; se tendrá pues

$$S = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 16 - \int_0^4 y\,dx = 32 - \int_0^4 x^2 dx$$

$$= 32 - \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^4 = 32 - \frac{1}{3}\,[64 - 0] \simeq 11.$$

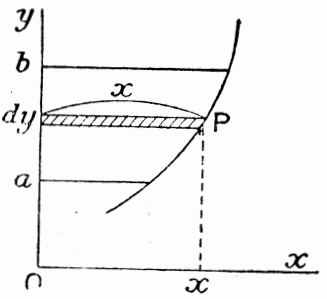


FIG. 25

NOTA. —Si se hubiera de calcular la superficie comprendida entre una curva y el eje de las y (fig. 25), se escribiría

$$S = \int_a^b x \cdot dy$$

resultado evidente, puesto que es la suma de todos los rectángulos infinitamente pequeños de superficie $x \cdot dy$.

8.° *Sea la curva* $y = e^{-x}$ sen x, *que representa una sinusoide amortiguada* (fig. 26). *Calcular la superficie comprendida entre la curva y el eje de las* x, *hallando la integral*

$$S = \int_0^{K\pi} y\,dx \qquad (K \textit{ entero y positivo})$$

y hallar el límite de S *si* $K \to \infty$.

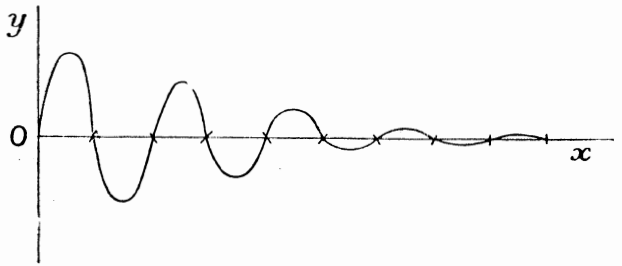


FIG. 26

— Las superficies por encima del eje de las x son positivas, y las que están por debajo negativas.

Busquemos los máximos y mínimos anulando y':

$$y' = \operatorname{sen} x(-e^{-x}) + e^{-x}\cos x = e^{-x}(\cos x - \operatorname{sen} x) = 0$$

de donde

$$\cos x = \operatorname{sen} x \qquad \text{y} \qquad \operatorname{tg} x = 1,$$

lo que da

$$x = \frac{\pi}{4} + K\pi,$$

de donde

$$y = e^{-\left(\frac{1}{4}+K\right)\pi} \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4} + K\pi\right) = e^{-\left(\frac{1}{4}+K\right)\pi} \cdot \frac{(-1)^K}{\sqrt{2}},$$

los máximos y mínimos decrecen, pues, exponencialmente cuando K aumenta.

Integremos primeramente sin ocuparnos de los límites:

$$I = \int \underbrace{e^{-x}}_{u} \underbrace{\operatorname{sen} x\, dx}_{dv} = e^{-x}(-\cos x) - \int -\cos x(-e^{-x})dx$$

$$= -\cos x\, e^{-x} - \int \underbrace{e^{-x}}_{u} \underbrace{\cos x\, dx}_{dv}$$

$$I = -\cos x\, e^{-x} - \left[e^{-x}\operatorname{sen} x - \int \operatorname{sen} x(-e^{-x})dx\right]$$

$$I = -e^{-x}(\cos x + \operatorname{sen} x) - I$$

$$2I = -e^{-x}(\cos x + \operatorname{sen} x)$$

luego

$$I = -\frac{e^{-x}}{2}(\cos x + \operatorname{sen} x).$$

Pasemos a los límites; la superficie total de 0 a $K\pi$ será pues

$$S = \int_0^{K\pi} y\, dx = -\frac{1}{2}\left[e^{-x}(\cos x + \operatorname{sen} x)\right]_0^{K\pi}$$

$$= -\frac{1}{2}\left[e^{-K\pi}(\cos K\pi + \operatorname{sen} K\pi) - (1 + 0)\right]$$

pero $\quad \operatorname{sen} K\pi = 0 \quad$ cualquiera que sea K,

y $\quad \cos K\pi = (-1)^K \quad$ cualquiera que sea K,

de donde

$$S = -\frac{1}{2}[e^{-K\pi}(-1)^K - 1] = \frac{1-(-1)^K \cdot e^{-K\pi}}{2}$$

y, si $K \to \infty$, ¡esta superficie total tiende hacia $\frac{1}{2}$!

50. Caso en que la curva se presenta en forma paramétrica. — Si la curva está dada en función de un parámetro, por ejemplo

$$x = f(\theta) \quad \text{e} \quad y = \varphi(\theta)$$

se aplica también la fórmula

$$S = \int y\, dx;$$

pero, como sólo subsiste el parámetro, es preciso hallar los límites de este parámetro cuando x varía entre dos límites conocidos. Se puede también conservar los límites de x a condición de recaer de nuevo en una expresión de x, lo cual no es siempre posible.

— Comencemos por un ejemplo simple, clásico.

Ejemplos:

1.° *Superficie del círculo* (fig. 27).

— La figura muestra en seguida cómo se puede expresar las coordenadas de un punto cualquiera P de la circunferencia en función del ángulo θ, que es aquí el parámetro:

$$x = R\cos\theta \quad \text{e} \quad y = R\operatorname{sen}\theta.$$

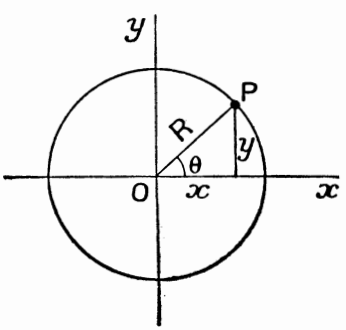


FIG. 27

Hagamos variar θ de 0 a $\frac{\pi}{2}$ y multipliquemos por 4 (variando así x de R a 0):

$$S = 4\int_R^0 y\, dx = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} R\operatorname{sen}\theta(-R\operatorname{sen}\theta\, d\theta)$$

$$= -4R^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1-\cos 2\theta}{2}\right) d\theta$$

$$= -\frac{4R^2}{2}\left[\theta - \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= -2R^2\left[\left(\frac{\pi}{2} - 0\right) - \frac{1}{2}(\operatorname{sen}\pi - \operatorname{sen} 0)\right] = \left|-\pi R^2\right| = \pi R^2.$$

Se hubiera podido también hacer integrando de 0 a π y duplicando.

La ecuación paramétrica de la elipse es (ver Tomo VI)

$$x = a\cos\varphi \qquad \text{e} \qquad y = b\operatorname{sen}\varphi.$$

Para la cuarta parte de la elipse, φ varía de $\frac{\pi}{2}$ a 0 cuando x varía de 0 a a, hallándose fácilmente $S = \pi ab$.

2.° *Superficie de la cicloide* (fig. 28*a*).

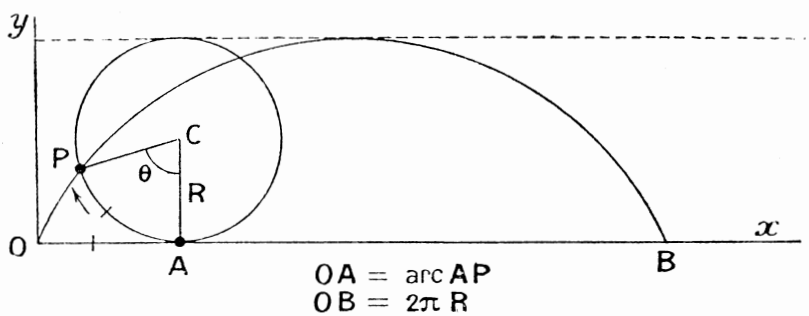


FIG. 28 *a*

—La cicloide es la curva engendrada en el espacio, por ejemplo, por la válvula de una rueda de bicicleta cuando esta rueda se mueve sin deslizar sobre un suelo horizontal, dando una vuelta completa.

Es fácil de establecer la ecuación paramétrica de la cicloide (en el Tomo VI se establecerá en *geometría analítica* su ecuación cartesiana).

Coloquémonos en un instante cualquiera (fig. 28*b*) en el que la rueda, de centro C, ha girado ya una distancia OA. El punto O se

eleva, desplazándose hacia la derecha, y viene a P; el arco AP es, pues, igual al segmento OA, y el radio de la rueda ha descrito en este momento un ángulo θ.

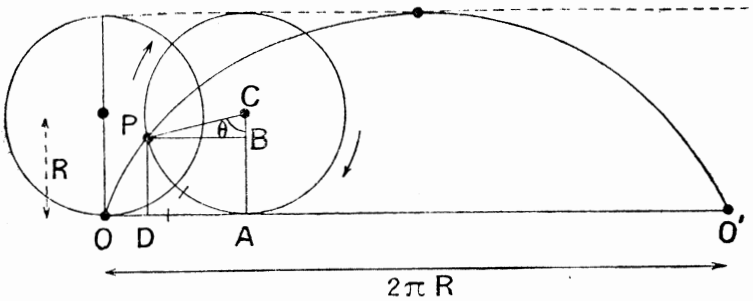


FIG. 23 *b*

—Llamemos x a la distancia del punto P, contada a partir de O, e y a la ordenada del punto P.

Se tiene

$$x = OD = OA - DA = \widehat{PA} - PB$$
$$= R\theta - R \operatorname{sen} \theta$$

e

$$y = PD = R - CB$$
$$= R - R \cos \theta,$$

lo que da finalmente

$$\boxed{\begin{aligned} x &= R(\theta - \operatorname{sen} \theta) \\ y &= R(1 - \cos \theta) \end{aligned}}$$

Para una vuelta del círculo generador, θ varía pues de 0 a 2π, el punto P engendra una *cicloide* (curva estudiada por PASCAL) y la superficie S comprendida entre la cicloide y el eje horizontal OO' es

$$S = \int_0^{2\pi} y\,dx = \int_0^{2\pi} R(1 - \cos\theta) \cdot R(1 - \cos\theta)d\theta$$

$$= R^2 \int_0^{2\pi} (1 - \cos\theta)^2 d\theta$$

$$= R^2 \left[\int_0^{2\pi} d\theta + \int_0^{2\pi} \cos^2\theta\, d\theta - 2\int_0^{2\pi} \cos\theta\, d\theta \right]$$

$$= R^2 \left[2\pi + \int_0^{2\pi} \frac{(1 + \cos 2\theta)}{2}\, d\theta - 2\int_0^{2\pi} \cos\theta\, d\theta \right].$$

Pero al principio de este curso se ha visto que la integral de un coseno (o de un seno) entre 0 y 2π es siempre nula; queda pues

$$S = R^2[2\pi + \pi] = 3\pi R^2,$$

es decir, tres veces la superficie de la rueda generatriz.

3.° *Superficie del bucle del folio de* DESCARTES (fig. 29).

$$x^3 + y^3 - 3axy = 0 = f(x, y).$$

— En este caso tenemos una función implícita. Llamemos y_1 a una ordenada cualquiera de la parte superior del bucle hasta el punto P (en el que la tangente es vertical), y llamemos y_2 a una ordenada cualquiera de la parte inferior del bucle. Calculemos la abscisa del punto P, donde la derivada y' es infinita:

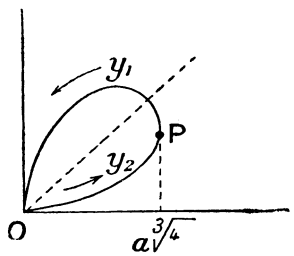


FIG. 29

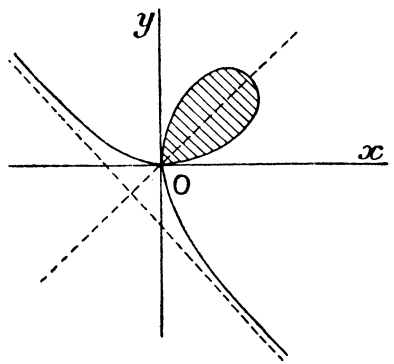


FIG. 29 *bis*

$$y_x' = -\frac{f_x'}{f_y'} = -\frac{3x^2 - 3ay}{3y^2 - 3ax} = \infty$$

de donde

$$3y^2 - 3ax = 0 \qquad \text{e} \qquad y = (ax)^{1/2}.$$

Llevémoslo a la ecuación de la curva

$$x^3 + (ax)^{3/2} - 3ax\sqrt{ax} = 0$$

es decir

$$x^3 - 2(ax)^{3/2} = 0$$
$$x^6 = 4(ax)^3$$
$$x^3 = 4a^3 \qquad \text{y} \qquad x = a\sqrt[3]{4},$$

de donde, la ordenada del punto P

$$y = (ax)^{1/2} = \sqrt{a}(a\sqrt[3]{4})^{1/2} = a\sqrt[3]{2}.$$

Se tendrá pues

$$S = \int_0^{a\sqrt[3]{4}} y_1 dx - \int_0^{a\sqrt[3]{4}} y_2 dx,$$

pero, para calcular estas integrales (puesto que no se puede calcular directamente y en función de x), es preciso expresar x e y en función de un parámetro. Pongamos por ejemplo

$$y = u \cdot x \qquad \text{o bien} \qquad \frac{y}{x} = u = \text{pendiente en un punto},$$

y llevémoslo a la ecuación de la curva:

$$x^3 + u^3x^3 - 3ax \cdot ux = 0$$

o bien

$$x(1 + u^3) = 3au$$

luego

$$x = \frac{3au}{1 + u^3} \qquad \text{y} \qquad y = \frac{3au^2}{1 + u^3},$$

de donde

$$dx = \frac{(1 + u^3)3a - 3au \cdot 3u^2}{(1 + u^3)^2} du = \frac{3a(1 - 2u^3)du}{(1 + u^3)^2},$$

llamemos u_1 al valor de u en el punto P.

Para la rama superior, la pendiente en cero es infinita y u varía de infinito a u_1; para la rama inferior, donde la pendiente es nula en 0, u varía de 0 a u_1. Se tendrá, pues

$$S = \int_\infty^{u_1} y_1\, dx - \int_0^{u_1} y_2\, dx = \int_\infty^{u_1} y\, dx + \int_{u_1}^0 y\, dx$$

$$= \int_\infty^0 y\, dx = -\int_0^0 y\, dx \qquad \text{(donde } u \text{ es la variable)}$$

y

$$S = -\int_0^\infty \frac{3au^2}{1 + u^3} \cdot \frac{3a(1 - 2u^3)}{(1 + u^3)^2} du = -9a^2 \int_0^\infty \frac{u^2(1 - 2u^3)}{(1 + u^3)^3} du.$$

Por tanto

$$1 + u^3 = z \qquad dz = 3u^2 du$$

para $u = 0$ $z = 1$

para $u = \infty$ $z = \infty$,

de donde

$$S = -9a^2 \int_1^\infty \frac{[1-2(z-1)]}{z^3} \cdot \frac{dz}{3} = -3a^2 \int_1^\infty \frac{(3-2z)}{z^3}\, dz$$

$$= -3a^2 \left[3\int_1^\infty \frac{dz}{z^3} - 2\int_1^\infty \frac{dz}{z^2}\right] = -3a^2 \left[-\frac{3}{2}\left(\frac{1}{z^2}\right)_1^\infty + 2\left(\frac{1}{z}\right)_1^\infty\right]$$

$$= -3a^2 \left[-\frac{3}{2}(0-1) + 2(0-1)\right] = -3a^2\left(\frac{3}{2} - 2\right) = \frac{3}{2}a^2$$

51. Caso en que la curva está en coordenadas polares (fig. 30). — Sabemos que, muy a menudo, se expresa la ecuación de una curva en coordenadas polares, es decir que la posición de un punto cualquiera P de una curva está dada por la longitud del radio vector ρ contada a partir de un punto fijo O, llamado *polo*, y por el ángulo θ que forma este radio vector con el origen: $\rho = f(\theta)$.

Si θ varía en una cantidad $d\theta$, ρ barre una superficie dS, cuyo valor vamos a calcular.

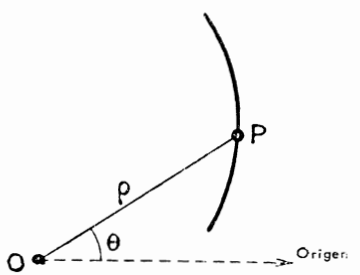


FIG. 30

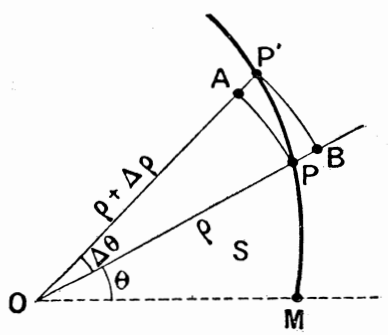


FIG. 31

— Tomemos en la figura 31 un punto P cualquiera y hagamos variar θ en una cantidad $\Delta\theta$; ρ varía entonces en $\Delta\rho$ y P viene a P'.

Describamos los arcos de círculo PA y P'B con centro en O. Llamemos S a la superficie MOP y ΔS a la OPP'. Pero ΔS es mayor

que la superficie del sector OPA y más pequeña que la del sector OP'B:

$$\text{superficie OPA} < \Delta S < \text{superficie OP'B}$$

o bien

$$\frac{1}{2}\rho^2 \Delta\theta < \Delta S < \frac{1}{2}(\rho + \Delta\rho)^2 \Delta\theta$$

o bien

$$\frac{1}{2}\rho^2 < \frac{\Delta S}{\Delta\theta} < \frac{1}{2}(\rho + \Delta\rho)^2.$$

Hagamos tender $\Delta\theta$ hacia cero, $\Delta\rho$ tiende también a cero, y el límite de $\frac{\Delta S}{\Delta\theta}$ será S_θ'. Pero esta última expresión está comprendida entre dos cantidades: la de la izquierda, que es fija, y la de la derecha, que, en el límite, se hace igual a la de la izquierda; se tendrá pues en el límite

$$S_\theta' = \frac{dS}{d\theta} = \frac{1}{2}\rho^2$$

de donde

$$dS = \frac{1}{2}\rho^2 \, d\theta,$$

$$\boxed{S = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{1}{2}\rho^2 \, d\theta}$$

Ejemplos:

1.º *Superficie del círculo:* $\rho = C^{te} = R$.

— Se tendrá

$$S = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} R^2 \, d\theta = 2R^2 \left[\theta \right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \pi R^2.$$

2.° *Superficie de un bucle de la lemniscata* (fig. 32).

$$\rho^2 = a^2 \cdot \cos 2\theta$$

donde θ *varía de* $-\frac{\pi}{4}$ a $+\frac{\pi}{4}$.

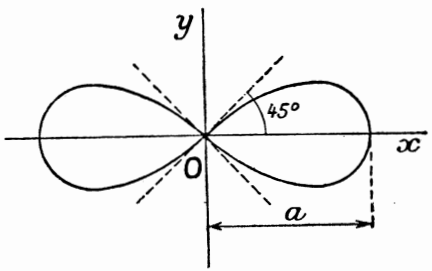


FIG. 32

— Se puede integrar de 0 a $\frac{\pi}{4}$ y duplicar

$$S = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2}\rho^2\, d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} a^2 \cos 2\theta \cdot d\theta$$

$$= \frac{a^2}{2}\left[\operatorname{sen} 2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{a^2}{2}\left[\operatorname{sen}\frac{\pi}{2} - 0\right]$$

$$= \frac{a^2}{2}.$$

3.° *Superficie de la cardicide* (fig. 33).

— Esta curva se encuentra en Radiogoniometría. Se construye como sigue: sea una circunferencia grande, de radio a y otras dos de diámetro a (ver fig. 33).

Sea OC el radio vector ρ obtenido añadiendo al radio OB una magnitud BC igual a OA:

$$OC = \rho = OB + BC = OB + OA$$
$$\rho = a + a\cos\theta = a(1 + \cos\theta).$$

Para $\theta > \frac{\pi}{2}$ se tiene

$$OM = \rho = OP - OD = a - a\cos(\pi - \theta)$$
$$= a(1 + \cos\theta).$$

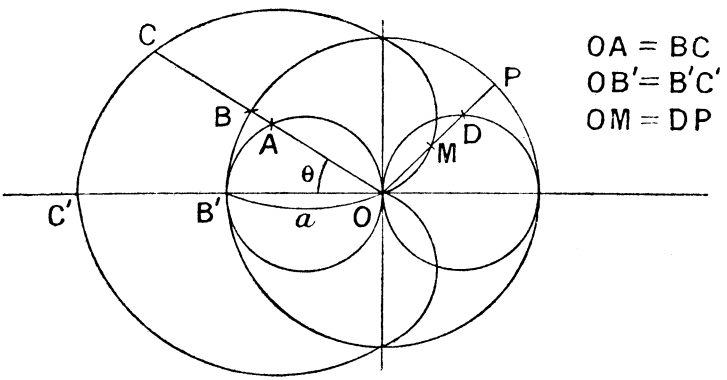


FIG. 33

Calculemos la superficie cuando θ varía de 0 a π y dupliquemos:

$$S = 2\int_0^{\pi} \frac{1}{2}\rho^2\, d\theta = \int_0^{\pi} a^2(1 + \cos\theta)^2 d\theta$$
$$= a^2\left[\int_0^{\pi} d\theta + \int_0^{\pi} \cos^2\theta\, d\theta + 2\int_0^{\pi} \cos\theta\, d\theta\right]$$
$$= a^2\left[\theta + \left(\frac{\theta}{2} + \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2\theta\right) + 2\operatorname{sen}\theta\right]_0^{\pi}$$
$$= \frac{3\pi a^2}{2}$$

4.° *Superficie de la parábola* (fig. 34), $y^2 = 2px$.

— Aprovechemos este ejemplo para mostrar al lector cómo se encuentra la ecuación de la parábola en coordenadas polares, tomando el polo en el foco F.

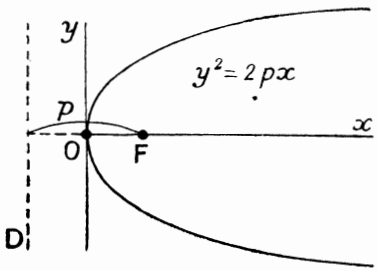


FIG. 34

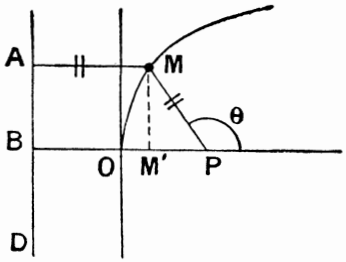


FIG. 35

Llamemos ρ al radio vector MP (fig. 35). Se sabe que la parábola es el lugar geométrico de los puntos M equidistantes de un punto fijo P, llamado foco, y de una recta D llamada directriz. La figura muestra que se cumple:

$$MA = PB - PM' = p - \rho\cos(\pi - \theta)$$

ahora bien $MA = MP = \rho$,

de donde $\rho = p + \rho \cdot \cos\theta$

luego $\rho(1 - \cos\theta) = p$

$$\rho = \frac{p}{1 - \cos\theta} = f(\theta).$$

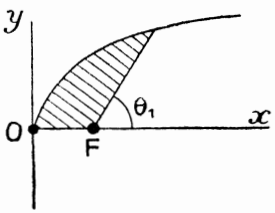


FIG. 36

La superficie del sector rayado (fig. 36) será pues

$$S = \int_{\pi}^{\theta_1} \frac{1}{2}\rho^2\, d\theta = \frac{1}{2}\int_{\pi}^{\theta_1} \frac{p^2}{(1 - \cos\theta)^2}\, d\theta.$$

Hagamos

$$\operatorname{tg}\frac{\theta}{2} = t \qquad \text{luego} \qquad d\theta = \frac{2dt}{1 + t^2},$$

Se tendrá

$$S = \frac{p^2}{2}\int_{\pi}^{\theta_1} \frac{\dfrac{2dt}{1 + t^2}}{\left(1 - \dfrac{1 - t^2}{1 + t^2}\right)^2} = p^2\int_{\pi}^{\theta_1} \frac{(1 + t^2)dt}{4t^4}$$

$$= \frac{p^2}{4}\left[\int \frac{dt}{t^4} + \int \frac{dt}{t^2}\right]_{\pi}^{\theta_1} = -\frac{p^2}{4}\left(\frac{1}{3\operatorname{tg}^3\dfrac{\theta_1}{2}} + \frac{1}{\operatorname{tg}\dfrac{\theta_1}{2}}\right).$$

Se reemplazaría θ_1 por el valor elegido.

5.° *Calcular la superficie del bucle del folio de* DESCARTES.

—Se ha calculado ya la superficie de la curva en coordenadas cartesianas. Para simplificar los cálculos tomemos $a = 1$, quedando la ecuación

$$x^3 + y^3 = 3xy.$$

Para expresarla en coordenadas polares, pongamos

$$x = \rho \cos \theta \qquad \text{y} \qquad y = \rho \operatorname{sen} \theta$$

de donde

$$\rho^3 \cos^3 \theta + \rho^3 \operatorname{sen}^3 \theta = 3\rho^2 \operatorname{sen} \theta \cos \theta$$

luego

$$\rho = \frac{3 \operatorname{sen} \theta \cos \theta}{\operatorname{sen}^3 \theta + \cos^3 \theta}.$$

Busquemos los límites de θ *de forma que* ρ *parta de* O *y vuelva al punto* O:

$\rho = 0$ para $\theta = 0$ (es el menor valor de θ)

y $\rho = 0$ para $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ (es el mayor valor de θ).

Se tendrá pues

$$S = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \rho^2 \, d\rho = \frac{9}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{sen}^2 \theta \cos^2 \theta}{(\operatorname{sen}^3 \theta + \cos^3 \theta)^2} \, d\theta$$

$$= \frac{9}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{sen}^2 \theta \cos^2 \theta}{\cos^6 \theta} \cdot \frac{d\theta}{\left(\dfrac{\operatorname{sen}^3 \theta}{\cos^3 \theta} + 1\right)^2}$$

$$= \frac{9}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tg}^2 \theta \cdot d\theta}{\cos^2 \theta (1 + \operatorname{tg}^3 \theta)^2}$$

Hagamos

$$\operatorname{tg} \theta = u \qquad \text{de donde} \qquad du = \frac{d\theta}{\cos^2 \theta},$$

lo que da

$$I = \frac{9}{2}\int \frac{u^2 du}{(1+u^3)^2} = \frac{9}{2}\cdot\frac{1}{3}\int \frac{dz}{z^2} = -\frac{9}{6}\frac{1}{z}$$

$$= -\frac{3}{2}\frac{1}{(1+u^3)}.$$

Volviendo a los límites

$$I = -\frac{3}{2}\left[\frac{1}{1+\operatorname{tg}^3\theta}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{3}{2}\left[\frac{1}{\infty}-1\right]$$

$$= +\frac{3}{2}.$$

Resultado idéntico al precedente haciendo $a = 1$.

Se ve así que una integral que parece complicada se calcula a menudo muy fácilmente gracias a transformaciones ingeniosas, llegándose a fin de cuentas a una integral por sustitución.

52. Superficie de una curva cerrada. — Anteriormente hemos calculado la superficie de una curva cerrada, el bucle del *folio de* DESCARTES, y vimos que se acudía a la utilización de un parámetro. Se puede generalizar el procedimiento.

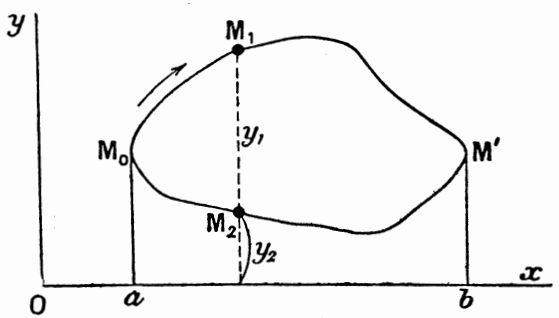


FIG. 37

— Supongamos (fig. 37) que la curva sólo sea cortada en dos puntos por una paralela al eje de las y, y sean y_1 e y_2 las ordenadas de estos puntos. Tracemos las dos tangentes verticales extremas, de abs-

cisas a y b. La superficie de la curva $aM_0M_1M'b$ es $\int_a^b y_1 dx$, y la de la curva $aM_0M_2M'b$ es $\int_a^b y_2 dx$.

La superficie de la curva cerrada es, pues, la diferencia de estas dos superficies

$$S = \int_a^b y_1 dx - \int_a^b y_2 dx = \int_a^b (y_1 - y_2) dx$$

o bien

$$S = \int_a^b y_1 dx + \int_b^a y_2 dx,$$

que se escribe simbólicamente (girando siempre sobre la curva en el mismo sentido):

$$S = \int_{\text{curva}} y\, dx.$$

Prácticamente, se expresarán las coordenadas de un punto M cualquiera de la curva en función de un parámetro, u o t o θ, variando este parámetro entre límites tales que se describa la curva *una sola vez*:

$$x = f(\theta) \qquad y = \varphi(\theta)$$

de donde

$$S = \int_{\theta_1}^{\theta_2} y\, dx = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \varphi(\theta) \cdot f'(\theta)\, d\theta.$$

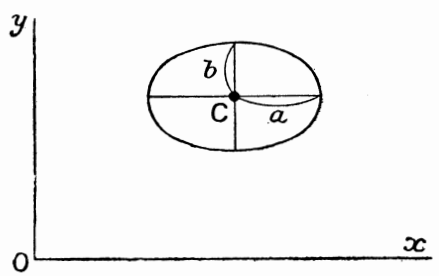


FIG. 38

Ejemplo. — Calcular la superficie de una elipse cuyo centro no está en el origen (fig. 38).

— Si el centro C estuviera en el origen O, demostraremos en *Analítica* (ver Tomo VI) que la ecuación de la elipse en coordenadas paramétricas es

$$x = a \cdot \cos \theta \qquad y = b \cdot \operatorname{sen} \theta,$$

donde θ es un parámetro que varía de 0 a 2π, cuya significación no aparece en la figura.

Llamando x_0 e y_0 a las coordenadas del centro, se tendrá, para un punto cualquiera de la elipse:

$$x = x_0 + a \cos \theta \qquad y = y_0 + b \operatorname{sen} \theta,$$

y por tanto

$$S = \int_0^{2\pi} (y_0 + b \operatorname{sen} \theta)(-a \operatorname{sen} \theta) d\theta$$

$$= -ay_0 \int_0^{2\pi} \operatorname{sen} \theta \, d\theta - ab \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^2 \theta \, d\theta,$$

la primera integral es nula, y queda

$$S = -ab \int_0^{2\pi} \left(\frac{1 - \cos 2\theta}{2} \right) d\theta = -\frac{ab}{2} \left[\int_0^{2\pi} d\theta - \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \cos 2\theta \cdot 2d\theta \right]$$

$$= -\frac{ab}{2} [2\pi - 0] = -\pi ab$$

Solamente cuenta el valor numérico, pues, si hubiésemos invertido los límites, hubiéramos hallado $+\pi ab$, siendo indiferente el sentido de rotación.

CAPITULO XII

LINEAS TRIGONOMETRICAS HIPERBOLICAS

Vamos a ver primeramente la definición de las líneas trigonométricas hiperbólicas, así como la forma en que aparecen en matemáticas y la manera en que han sido halladas. A continuación estudiaremos sus aplicaciones al cálculo integral.

Vamos a ver cómo las líneas hiperbólicas se encuentran ligadas al cálculo de las superficies de las curvas, partiendo de la diferencial de la superficie de un sector de curva, que expresaremos en coordenadas cartesianas.

53. Diferencial de la superficie de un sector en coordenadas cartesianas. — La fórmula $dS = \frac{1}{2}\rho^2 d\theta$ puede también expresarse en coordenadas cartesianas, es decir, en función de x y de y. En efecto (fig. 39): por el polo O, tracemos una perpendicular a la línea que sirve de origen de ángulos, lo que da los dos ejes Ox y Oy, y sean x e y las coordenadas de un punto P cualquiera. Se tiene

$$x = \rho \cos \theta \qquad y = \theta \operatorname{sen} \theta$$

con

$$\frac{}{x} = \operatorname{tg} \theta \qquad \text{y} \qquad \theta = \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x}.$$

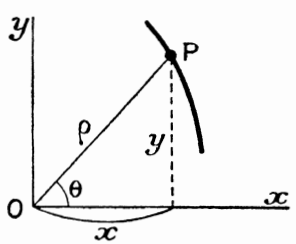


FIG. 39

Diferenciemos

$$d\theta = \frac{1}{1 + \frac{y^2}{x^2}} \cdot \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2} = \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2 + y^2}$$

pero, $\rho^2 = x^2 + y^2$, de donde

$$d\theta = \frac{x\,dy - y\,dx}{\rho^2}$$

luego

$$dS = \frac{1}{2}\rho^2 d\theta = \frac{1}{2}\rho^2 \cdot \left(\frac{x\,dy - y\,dx}{\rho^2}\right)$$

$$\boxed{dS = \frac{1}{2}(x\,dy - y\,dx)}$$

e, integrando, se tendrá S expresando x e y por medio del parámetro θ. Esta fórmula simplifica a menudo los cálculos; por otra parte, va a abrirnos nuevos horizontes.

Aplicaciones. — 1.° *Superficie de un sector de círculo* $x^2 + y^2 = R^2$.

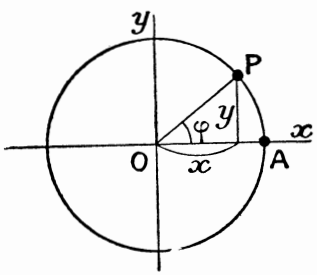


FIG. 40

— Tomemos un círculo trigonométrico, R = 1 (fig. 40), y calculemos la superficie del sector OAP.
Se tiene

$$x = \cos\varphi \quad \text{y} \quad y = \operatorname{sen}\varphi$$

de donde

$$dx = -\operatorname{sen}\varphi \cdot d\varphi \quad \text{y} \quad dy = \cos\varphi \cdot d\varphi.$$

Se tendrá pues

$$dS = \frac{1}{2}(x\,dy - y\,dx)$$

$$= \frac{1}{2}[\cos\varphi \cdot \cos\varphi\, d\varphi - \operatorname{sen}\varphi(-\operatorname{sen}\varphi)d\varphi]$$

$$= \frac{1}{2}(\cos^2\varphi + \operatorname{sen}^2\varphi)d\varphi = \frac{1}{2}d\varphi$$

de donde

$$S = \frac{1}{2}\int_0^{\varphi} d\varphi = \frac{\varphi}{2} = \frac{1}{2}\operatorname{arc\,cos}\, x.$$

De aquí se deducen las dos importantes fórmulas

$$\boxed{\begin{array}{l} y = \operatorname{sen} 2S \\ x = \cos 2S \end{array}} \begin{array}{l} = f(S) \\ = g(S). \end{array}$$

Se llega de esta manera a expresar la abscisa y la ordenada de un punto de la circunferencia, en función de la superficie S del sector circular, por medio de las líneas trigonométricas circulares, habituales.

Haciendo el mismo cálculo con una hipérbola, vamos a llegar a las líneas trigonométricas hiperbólicas.

2.° *Superficie de un sector hiperbólico*

— Veremos en el Tomo VI, en *Geometría Analítica,* que la ecuación de la hipérbola con centro en el origen es

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

donde a es el semieje, o sea OM_0 en la figura 41.

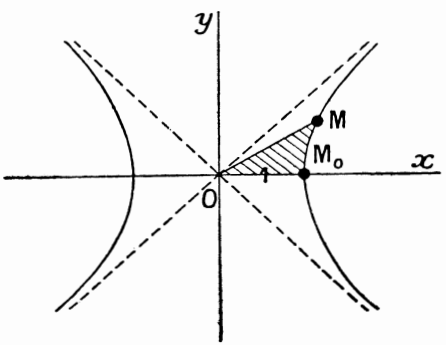


FIG. 41

Tomemos, por analogía con el ejemplo precedente, en que el radio del círculo era igual a 1, una hipérbola (que llamaremos... trigonométrica), en la que

$$a = b = 1$$

lo que da

$$x^2 - y^2 = 1,$$

siendo x e y las coordenadas de un punto M cualquiera de una hipérbola.

Llamemos S a la superficie del sector hiperbólico OM_0M. Se tiene siempre la fórmula general

$$dS = \frac{1}{2}(x\,dy - y\,dx),$$

y, para calcular S, hay que expresar x e y, como hemos dicho anteriormente, en función de un parámetro t, de forma que se verifiquen las tres condiciones siguientes:

1.° es preciso que se tenga siempre $x^2 - y^2 = 1$
2.° que para $x = 1$ $y = 0$
3.° que para $x = \infty$ $y = \infty$.

Demostraremos en la página siguiente que las expresiones de x e y en función de un parámetro t, desconocido por el momento, *son*:

$$x = \frac{e^t + e^{-t}}{2} \qquad y = \frac{e^t - e^{-t}}{2}$$

Fácilmente se ve que

para $t = 0$ $x = 1$ e $y = 0$
para $t = \infty$ $x = \infty$ e $y = \infty$.

En cuanto a la primera condición, da:

$$x^2 - y^2 = \left(\frac{e^t + e^{-t}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^t - e^{-t}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}(e^{2t} + e^{-2t} + 2) - \frac{1}{4}(e^{2t} + e^{-2t} - 2) =$$

Diferenciemos x e y

$$dx = \frac{e^t - e^{-t}}{2}\,dt = y \cdot dt \qquad \text{y} \qquad dy = \left(\frac{e^t + e^{-t}}{2}\right)dt = x\,dt.$$

Se tendrá pues

$$dS = \frac{1}{2}(x \cdot x\,dt - y \cdot y\,dt) = \frac{1}{2}(x^2 - y^2)dt = \frac{1}{2}dt$$

de donde

$$S = \int \frac{1}{2}dt + C \qquad \text{(pero } C = 0 \text{ ya que para } t = 0,\ S = 0\text{)}$$

luego

$$S = \frac{t}{2},$$

es decir que

$$\boxed{t = 2S}$$

Puede entonces escribirse

$$x = \frac{e^{2S} + e^{-2S}}{2} \qquad \text{e} \qquad y = \frac{e^{2S} - e^{-2S}}{2}.$$

Veamos seguidamente qué representa el parámetro *t*. *Pero este resultado nos muestra que, lo mismo que para el círculo, las coordenadas de un punto M cualquiera de la hipérbola pueden expresarse en función de la superficie S del sector hiperbólico. Por eso, por analogía con el círculo, se llamará x al coseno hiperbólico e y al seno hiperbólico*, escribiéndose en abreviatura:

$$x = \operatorname{ch} t = \frac{e^{t} + e^{-t}}{2} \qquad \text{e} \qquad y = \operatorname{sh} t = \frac{e^{t} - e^{-t}}{2}$$

— *¿Cuál es ahora la significación del parámetro t?* Calculemos $x + y$

$$x + y = \frac{e^{t} + e^{-t}}{2} + \frac{e^{t} - e^{-t}}{2} = e^{t}$$

pero

$$x^2 - y^2 = 1 \qquad \text{e} \qquad y = \sqrt{x^2 - 1}$$

de donde

$$e^{t} = x + y = x + \sqrt{x^2 - 1}$$

y finalmente

$$t = \operatorname{Log} (x + \sqrt{x^2 - 1}),$$

por tanto

$$S = \frac{t}{2} = \frac{1}{2} \operatorname{Log} (x + \sqrt{x^2 - 1}).$$

así, *t* es el doble de la superficie S y tiene como valor algebraico el famoso logaritmo que tan a menudo encontramos.

— *Veamos cómo han sido halladas las expresiones precedentes de x e y en función de t.*

Es muy sencillo: basta con calcular S diciendo, como muestra la figura 42, que es la diferencia entre la superficie del triángulo OMP y la de la hipérbola M_0MP, que es $\int_1^x y\,dx$, a la cual nosotros llamaremos A

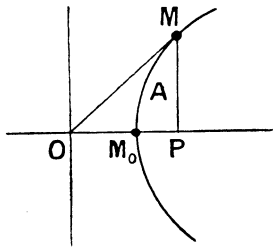


FIG. 42

$$A = \sup M_0MP = \int_1^x y\,dx = \int_1^x \sqrt{x^2-1}\,dx,$$

que hemos integrado al final del capítulo de la integración por partes. Se tiene pues, reemplazando a^2 por 1 en el resultado que se ha hallado

$$A = \left[\frac{x\sqrt{x^2-1}}{2} - \frac{1}{2}\operatorname{Log}(x + \sqrt{x^2-1})\right]_1^x,$$

para $x = 1$ este valor se anula y queda:

$$A = \frac{1}{2}x\sqrt{x^2-1} - \frac{1}{2}\operatorname{Log}(x + \sqrt{x^2-1}) = \frac{1}{2}xy - \frac{1}{2}\operatorname{Log}(x+y).$$

Volvamos a S:

$$S = \text{superficie triángulo } \hat{O}MP - A = \frac{1}{2}xy - \left[\frac{1}{2}xy - \frac{1}{2}\operatorname{Log}(x+y)\right]$$

$$S = \frac{1}{2}\operatorname{L}(x+y)$$

$$2S = \operatorname{L}(x+y).$$

Hagamos

$$2S = \operatorname{Log} e^t = t$$

lo que da

$$x + y = e^t$$

es decir que, llamando, *por analogía con el círculo*,

$$x = \operatorname{ch} t \quad \text{e} \quad y = \operatorname{sh} t:$$
$$\operatorname{ch} t + \operatorname{sh} t = e^t.$$

Pero siempre se tiene

$$x^2 - y^2 = 1$$

o bien

$$\operatorname{ch}^2 t - \operatorname{sh}^2 t = 1.$$

Dividiendo esta última ecuación por la (1), se tiene:

$$\frac{\text{ch}^2 t - \text{sh}^2 t}{\text{ch}\, t + \text{sh}\, t} = \frac{1}{e^t},$$

y, simplificando el término de la izquierda, queda

$$\text{ch}\, t - \text{sh}\, t = e^{-t}. \qquad (2)$$

Sumemos y restemos miembro a miembro las ecuaciones (1) y (2), obteniéndose:

$$\text{ch}\, t = \frac{e^t + e^{-t}}{2} \qquad \text{y} \qquad \text{sh}\, t = \frac{e^t - e^{-t}}{2}.$$

c.q.d.

—La aparición de este coseno y de este seno hiperbólico da nacimiento a las líneas trigonométricas hiperbólicas y a gran número de fórmulas con muchas aplicaciones, las cuales estudiaremos ahora con detalle.

54. Líneas trigonométricas hiperbólicas.—Se, puede como se ha visto anteriormente, partiendo de una hipérbola equilátera, fundar una trigonometría hiperbólica, cuyas aplicaciones son numerosas y útiles prácticamente.

Para seguir la costumbre, que consiste en llamar x a la variable e y a la función, y basándonos en los cálculos precedentes, escribiremos en lo sucesivo, a fin de generalizar,

$$\text{coseno hiperbólico de } x = \text{ch}\, x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\text{seno hiperbólico de } x = \text{sh}\, x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

La relación $\dfrac{\text{sh}\, x}{\text{ch}\, x}$ se llama *tangente hiperbólica de* x (o «th x»):

$$\text{th}\, x = \frac{\text{sh}\, x}{\text{ch}\, x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

Numéricamente se puede calcular sus valores por los desarrollos

en serie de MAC-LAURIN; en efecto, se ha visto en el Tomo II de este curso (párrafo 3) que

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} \dots$$

$$e^{-x} = 1 - \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} \dots,$$

de donde se deduce

$$\operatorname{sh} x = \frac{x}{1!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \dots$$

y

$$\operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$$

— En los formularios pueden encontrarse tablas de líneas hiperbólicas, tales como l'*Agenda Dunod* de *Mathématiques,* de DENIS-PAPIN.

— **Fórmulas fundamentales hiperbólicas.**

Hay tres fórmulas fundamentales que sirven de base a todos los cálculos relacionados con las líneas hiperbólicas:

$$\boxed{\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}} \qquad \boxed{\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}}$$

Sumando y restando miembro a miembro, se tiene:

$$e^x = \operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x \qquad e^{-x} = \operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x$$

multiplicando estas dos ecuaciones entre sí:

$$(\operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x)(\operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x) = e^x \cdot e^{-x} = 1$$

o bien

$$\boxed{\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1}$$

De donde

$$\operatorname{ch} x = \sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 x} \qquad \text{que es} \qquad > 1.$$

55. Cálculo de las derivadas de las líneas hiperbólicas.

— Se tiene

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2},$$

de donde, derivando

$$\operatorname{ch}' x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

luego

$$\boxed{\operatorname{ch}' x = \operatorname{sh} x}$$

Asimismo, se tiene

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

de donde, derivando

$$\operatorname{sh}' x = \frac{e^x + e^{-x}}{2},$$

luego

$$\boxed{\operatorname{sh}' x = \operatorname{ch} x}$$

$$\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \frac{u}{v} \quad \text{y} \quad \operatorname{th}' x = \frac{\operatorname{ch} x \cdot \operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x \cdot \operatorname{sh} x}{\operatorname{ch}^2 x},$$

$$\operatorname{th}' x = \frac{\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x}{\operatorname{ch}^2 x} = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$$

o bien

$$= 1 - \frac{\operatorname{sh}^2 x}{\operatorname{ch}^2 x} = 1 - \operatorname{th}^2 x.$$

Así

$$\boxed{\operatorname{th}' x = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x} = 1 - \operatorname{th}^2 x}$$

56. Fórmulas diversas. — Sh x y Ch x en función de th x.

Se tiene

$$\operatorname{ch}^2 x = 1 + \operatorname{sh}^2 x,$$

dividamos todo por $\text{ch}^2 x$

$$1 = \frac{1}{\text{ch}^2 x} + \text{th}^2 x$$

de donde se deduce

$$\boxed{\text{ch}\, x = \frac{1}{\sqrt{1 - \text{th}^2 x}}}$$

y

$$\text{sh}\, x = \sqrt{\text{ch}^2 x - 1} = \sqrt{\frac{1}{1 - \text{th}^2 x}} - 1$$

es decir

$$\boxed{\text{sh}\, x = \frac{\text{th}\, x}{\sqrt{1 - \text{th}^2 x}}}$$

Fórmulas de adición.

Se tiene

$$\text{ch}(a + b) = \frac{e^{a+b} + e^{-(a+b)}}{2} = \frac{e^a \cdot e^b + e^{-a} \cdot e^{-b}}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\left[(\text{ch}\, a + \text{sh}\, a)(\text{ch}\, b + \text{sh}\, b) + (\text{ch}\, a - \text{sh}\, a)(\text{ch}\, b - \text{sh}\, b)\right]$$

simplificando, queda

$$\boxed{\text{ch}\,(a + b) = \text{ch}\, a \cdot \text{ch}\, b + \text{sh}\, a \cdot \text{sh}\, b}$$

Se hallaría por el mismo procedimiento

$$\boxed{\text{sh}\,(a + b) = \text{sh}\, a \cdot \text{ch}\, b + \text{ch}\, a \cdot \text{sh}\, b}$$

Si ahora se hace $a = b = x$, se tiene

y

$$\boxed{\begin{aligned} \text{ch}\, 2x &= \text{ch}^2 x + \text{sh}^2 x \\ \text{sh}\, 2x &= 2sh\, x \cdot \text{ch}\, x \end{aligned}}$$

Por un procedimiento análogo al empleado en la trigonometría circular, se deduce

$$\boxed{\begin{aligned} \operatorname{sh}^2 x &= \frac{\operatorname{ch} 2x - 1}{2} \\ \operatorname{ch}^2 x &= \frac{\operatorname{ch} 2x + 1}{2} \end{aligned}}$$

fórmulas que nos servirán después en el cálculo de algunas integrales.

57. Curvas de ch x, sh x y th x. — Conociendo las derivadas de estas funciones, podemos trazar sus curvas.

1.° *Sea*

$$y = \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

Para $x = \pm \infty \quad y = +\infty$

para $x = 0 \quad y = 1,$

$$y' = \operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = 0 \quad \text{de donde} \quad e^x = e^{-x}$$

$$e^{2x} = 1 \quad \text{y} \quad 2x = \operatorname{Log} 1 \quad x = 0.$$

Estudiemos el signo de y'':

$$y'' = \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

que es siempre positiva *cualquiera que sea el signo de* x; se tendrá, pues, un mínimo de y, lo que da la curva de la figura 43.

2.° *Sea*

$$y = \operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

Para $x = 0 \quad y = 0$

para $x = -\infty \quad y = -\infty$

para $x = +\infty \quad y = +\infty.$

La derivada es

$$y' = \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = 0 \quad \text{de donde} \quad e^x = -\frac{1}{e^x},$$

$e^{2x} = -1$, lo que es imposible, luego no hay ni máximo ni mínimo.

Se tiene $y'' = \operatorname{sh} x$, que se anula por $e^x = e^{-x} = \dfrac{1}{e^x}$ es decir

$$e^{2x} = 1 \qquad \text{luego} \qquad x = 0,$$

se tiene un punto de inflexión, cuya pendiente está dada por y', para $x = 0$:

$$y'_{x=0} = 1 \qquad \text{de donde} \qquad \alpha = 45°.$$

Finalmente, para $x = \pm \infty$, $y' = \infty$, luego las ramas de la curva son verticales, obteniéndose la curva de la figura 44.

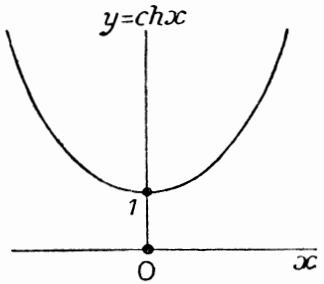


FIG. 43

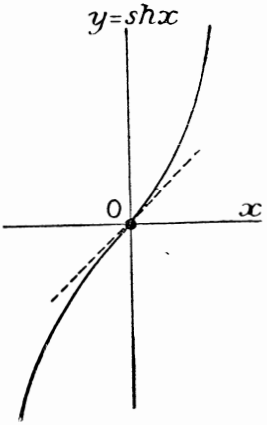


FIG. 44

3.° *Sea*

$$y = \operatorname{th} x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}.$$

Para $x = 0$ $\quad y = 0$

para $y = +\infty$ $\quad y = \dfrac{\infty}{\infty}$, $\quad \dfrac{N'}{D'} = \dfrac{2e^{2x}}{2e^{2x}} = +1$

para $x = -\infty$ $\quad y = -1.$

La derivada es:

$$y' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$$

que no se puede anular, luego no hay ni máximo ni mínimo. Es siempre positiva, e y crece indefinidamente.

Para

$$x = 0 \qquad y' = +1 \qquad \text{(pendiente} = 45°\text{)},$$

Se vería fácilmente que y'' se anula para $x = 0$, que es un punto de inflexión.

Por otra parte, para $x = \pm \infty$ se ha visto que $\operatorname{ch} x = +\infty$, luego

$$y' = \frac{1}{\infty} = 0$$

y la curva será horizontal, lo que da la curva de la figura 45.

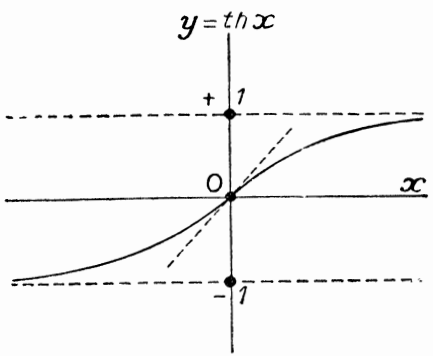


FIG. 45

NOTA. — Veremos más adelante, en el estudio de la curva llamada *catenaria* (que es la curva que toma una cadena o cuerda fija en sus dos extremos y que pende bajo la acción de su propio peso) que la curva representativa de $ch\,x$ es una catenaria. (Ver *Cálculo de las longitudes de las curvas, en el párrafo* 64).

58. Funciones hiperbólicas inversas.

1.° Sea $y = \operatorname{ch} x$. *Se dice que* x *es el argumento cuyo coseno hiperbólico es igual a* y, y se escribe

$$x = \arg \operatorname{ch} y$$

esta función no está definida más que para $y \geqslant 1$ (ver curva de $\operatorname{ch} x$).

2.° Sea $y = \operatorname{sh} x$. *Se dice que* x *es el argumento cuyo seno hiperbólico es igual a* y, y se escribe

$$x = \arg \operatorname{sh} y.$$

3.° Sea $y = \text{th}\, x$. *Se dice que* x *es el argumento cuya tangente hiperbólica es igual a* y, y se escribe

$$x = \text{arg th}\, y.$$

— **Cálculo del ángulo (o argumento) hiperbólico.** — Cuando se conoce $sh\, x$, $ch\, x$ o $th\, x$, es útil poder calcular el argumento x.

1.° *Sea*

$$y = \text{sh}\, x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

— Se tiene

$$e^x - \frac{1}{e^x} = 2y \qquad \text{y} \qquad e^{2x} - 1 = 2y\, e^x$$

o bien

$$e^{2x} - 2y\, e^x = 1,$$

sumemos y^2 a cada miembro

$$e^{2x} - 2y\, e^x + y^2 = 1 + y^2 \quad \text{o bien} \quad (e^x - y)^2 = 1 + y^2$$

$$e^x - y = \sqrt{1 + y^2}$$

$$e^x = y + \sqrt{1 + y^2}$$

y

$$x = \text{Log}\,(y + \sqrt{1 + y^2}) = \text{arg sh}\, y.$$

2.° *Sea*

$$y = \text{ch}\, x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

— Se deduce

$$e^x + \frac{1}{e^x} = 2y \qquad \text{y} \qquad e^{2x} + 1 = 2y\, e^x$$

o bien

$$e^{2x} - 2y\, e^x = -1,$$

sumemos y^2 a ambos miembros

$$e^{2x} - 2y\, e^x + y^2 = y^2 - 1 \quad \text{o bien} \quad (e^x - y)^2 = y^2 - 1$$

$$e^x - y = \sqrt{y^2 - 1}$$

$$e^x = y + \sqrt{y^2 - 1}$$

de donde

$$x = \text{Log}\,(y + \sqrt{y^2 - 1}) = \text{arg ch}\, y.$$

3.° *Sea*

$$y = \text{th}\, x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$$

— Se tiene

$$e^x - e^{-x} = y(e^x + e^{-x}) = y\, e^x + y\, e^{-x}$$

o bien

$$e^x(1 - y) = e^{-x}(1 + y)$$

$$e^{2x} = \frac{1 + y}{1 - y}$$

luego

$$x = \frac{1}{2}\text{Log}\left(\frac{1 + y}{1 - y}\right) = \text{arg th}\, y.$$

59. Ejercicios numéricos sobre las líneas hiperbólicas.

1.° *Sea*

$$x = 0{,}82.$$

Calcular

$$\text{sh}\, x,\ \text{ch}\, x \quad \text{y} \quad \text{th}\, x.$$

Se tiene

$$\text{sh}\, x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} = 0{,}915$$

$$\text{ch}\, x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} = 1{,}356$$

$$\text{th}\, x = \frac{\text{sh}\, x}{\text{ch}\, x} = 0{,}675.$$

2.° *Sea*

$$\text{sh}\, x = 0{,}65.$$

Calcular x.

Se tiene

$$x = \text{Log}\,(0{,}65 + \sqrt{1 + 0{,}65^2}) = 0{,}61.$$

3.° *Sea*

$$\text{th}\, x = 0{,}75.$$

Calcular x.

Se tiene

$$x = \frac{1}{2}\operatorname{Log}\left(\frac{1+0{,}75}{1-0{,}75}\right) = 0{,}973.$$

4.° *Sea*

Calcular φ $\qquad \operatorname{ch}\varphi = \dfrac{x+8}{2\sqrt{7}}.$

Se tiene

$$\varphi = \operatorname{Log}\left(\frac{x+8}{2\sqrt{7}} + \sqrt{\left(\frac{x+8}{2\sqrt{7}}\right)^2 - 1}\right) = \operatorname{Log}\left(\frac{x+8+\sqrt{x^2+16x+36}}{2\sqrt{7}}\right)$$

60. Líneas hiperbólicas de una expresión imaginaria. — En ciertas aplicaciones de la electricidad se encuentran expresiones de la forma *ch jx, sh jx* y *th jx,* que hay que saber calcular. Para ello basta con volver a la forma exponencial, lo que nos lleva a las fórmulas de EULER con exponenciales imaginarias, vistas en los desarrollos en serie. Se tiene, reemplazando x por jx:

$$\operatorname{ch} jx = \frac{e^{jx}+e^{-jx}}{2} = \cos x,$$

$$\operatorname{sh} jx = \frac{e^{jx}-e^{-jx}}{2} = j \operatorname{sen} x$$

$$\operatorname{th} jx = \frac{\operatorname{sh} jx}{\operatorname{ch} jx} = j\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = j \operatorname{tg} x.$$

En resumen

$$\boxed{\begin{array}{l}\operatorname{ch} jx = \cos x \\ \operatorname{sh} jx = j \operatorname{sen} x \\ \operatorname{th} jx = j \operatorname{tg} x\end{array}}$$

Si ahora reemplazamos x por jx en las fórmulas de EULER:

$$\frac{e^{jx}+e^{-jx}}{2} = \cos x \qquad \text{y} \qquad \frac{e^{jx}-e^{-jx}}{2j} = \operatorname{sen} x$$

se obtiene, puesto que $j^2 = -1$

$$\cos jx = \frac{e^{x}+e^{-x}}{2} = \operatorname{ch} x$$

$$\operatorname{sen} jx = \frac{e^{-x}-e^{x}}{2j} = j \operatorname{sh} x$$

y

$$\operatorname{tg} jx = \frac{\operatorname{sen} jx}{\cos jx} = j \operatorname{th} x.$$

Por tanto, estamos ahora en condiciones de desarrollar $\operatorname{sh}(a + jb)$ y $\operatorname{ch}(a + jb)$ eliminando las funciones hiperbólicas de ángulos imaginarios con la ayuda de estas expresiones:

$$\begin{aligned}\operatorname{sh}(a + jb) &= \operatorname{sh} a \cdot \operatorname{ch} jb + \operatorname{ch} a \cdot \operatorname{sh} jb \\ &= \operatorname{sh} a \cdot \cos b + j \operatorname{ch} a \cdot \operatorname{sen} b,\end{aligned}$$

asimismo

$$\operatorname{ch}(a + jb) = \operatorname{ch} a \cdot \cos b + j \operatorname{sh} a \cdot \operatorname{sen} b$$

y

$$\operatorname{th}(a + jb) = \frac{\operatorname{th} a + j \operatorname{tg} b}{1 + j \operatorname{th} a \cdot \operatorname{tg} b}.$$

Ejemplo. — Calcular $ch(1 + j\pi)$.

Se tiene

$$\begin{aligned}\operatorname{ch}(a + b) &= \operatorname{ch}(1 + j\pi) \\ &= \operatorname{ch} 1 \cdot \cos \pi + j \operatorname{sh} 1 \cdot \operatorname{sen} \pi\end{aligned}$$

pero

$$\operatorname{ch} 1 = \frac{e^1 + e^{-1}}{2} = 1{,}54,$$

quedando (puesto que $\operatorname{sen} \pi = 0$ y $\cos \pi = -1$):

$$\operatorname{ch}(1 + j\pi) = -1{,}54.$$

APLICACIONES DE LAS LINEAS HIPERBOLICAS

Las líneas hiperbólicas tienen un gran número de aplicaciones. Citemos las principales:

1.° Cálculo simplificado de un gran número de integrales.

2.° En electricidad, en el estudio de los filtros.

3.° En radio, en la propagación de la corriente eléctrica de alta frecuencia a lo largo de las líneas. También en la teoría de antenas y de hiperfrecuencias (radar, televisión, etc.)

Vamos a estudiar aquí sus aplicaciones al cálculo de ciertas integrales, y en el Tomo V (*Ecuaciones Diferenciales*) haremos una aplicación eléctrica estudiando la propagación de la corriente eléctrica a lo largo de una línea, en alta frecuencia.

61. Aplicación de las líneas hiperbólicas al cálculo de ciertas integrales.

Dado que se tiene

$$\mathrm{ch}^2\varphi - \mathrm{sh}^2\varphi = 1,$$

se deduce

$$\mathrm{ch}^2\varphi = \mathrm{sh}^2\varphi + 1 \qquad \text{y} \qquad \mathrm{sh}^2\varphi = \mathrm{ch}^2\varphi - 1.$$

Podremos entonces utilizar estas fórmulas, como vamos a ver, para calcular ciertas integrales que contienen $\sqrt{x^2 \pm \mathrm{K}^2}$ en el numerador o en el denominador.

Ejemplos.

1.° *Sea calcular* $\mathrm{I} = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 12x + 48}}$.

— Se tiene

$$\sqrt{x^2 + 12x + 48} = \sqrt{(x+6)^2 + 12}.$$

Hagamos

$$(x + 6) = u \qquad \text{y} \qquad 12 = \mathrm{K}^2$$

así como

$$u = \mathrm{K}\,\mathrm{sh}\,\varphi \qquad \text{de donde} \qquad dx = du = \mathrm{K}\,\mathrm{ch}\,\varphi\, d\varphi.$$

La integral queda pues

$$\mathrm{I} = \int \frac{du}{\sqrt{u^2 + \mathrm{K}^2}} = \int \frac{\mathrm{K}\,\mathrm{ch}\,\varphi\, d\varphi}{\sqrt{\mathrm{K}^2\,\mathrm{sh}^2\varphi + \mathrm{K}^2}} = \int \frac{\mathrm{ch}\,\varphi\, d\varphi}{\sqrt{\mathrm{sh}^2\varphi + 1}} = \int \frac{\mathrm{ch}\,\varphi\, d\varphi}{\mathrm{ch}\,\varphi}$$

$$= \int d\varphi = \varphi.$$

Ahora hay que volver a x. Pero tenemos que

$$\mathrm{sh}\,\varphi = \frac{u}{\mathrm{K}} = \frac{e^{\varphi} - e^{-\varphi}}{2}$$

y

$$\mathrm{ch}\,\varphi = \sqrt{\frac{u^2}{\mathrm{K}^2} + 1} = \frac{e^{\varphi} + e^{-\varphi}}{2}.$$

Sumemos miembro a miembro

$$\left(\frac{e^{\varphi} + e^{-\varphi}}{2}\right) + \left(\frac{e^{\varphi} - e^{-\varphi}}{2}\right) = \frac{u}{\mathrm{K}} + \sqrt{\frac{u^2}{\mathrm{K}^2} + 1}$$

que queda

$$e^{\varphi} = \frac{u}{K} + \sqrt{\frac{u^2}{K^2} + 1}$$

luego

$$\varphi = \operatorname{Log}\left(\frac{u}{K} + \sqrt{\frac{u^2}{K^2} + 1}\right).$$

Se tendrá finalmente

$$I = \operatorname{Log}\left[\frac{(x+6) + \sqrt{(x+6)^2 + 12}}{\sqrt{12}}\right].$$

2.° *Sea calcular*

$$I = \int \sqrt{x^3 + 24x + 244}\, dx.$$

—Se tiene

$$\sqrt{x^2 + 24x + 244} = \sqrt{(x+12)^2 + 100}.$$

Hagamos

$$u = x + 12 \qquad K^2 = 100$$

y

$$u^2 = K^2 \cdot \operatorname{sh}^2 \varphi \qquad \text{con} \qquad du = K \operatorname{ch} \varphi\, d\varphi.$$

La integral queda

$$I = \int \sqrt{K^2 \operatorname{sh}^2 \varphi + K^2} \cdot K \operatorname{ch} \varphi\, d\varphi,$$

$$= K^2 \int \sqrt{\operatorname{sh}^2 \varphi + 1} \cdot \operatorname{ch} \varphi\, d\varphi = K^2 \int \operatorname{ch}^2 \varphi \cdot d\varphi$$

$$= K^2 \int \left(\frac{1 + \operatorname{ch} 2\varphi}{2}\right) d\varphi = \frac{K^2}{2}\left[\int d\varphi + \frac{1}{2}\int \operatorname{ch} 2\varphi \cdot 2d\varphi\right]$$

$$= \frac{K^2}{2}\left(\varphi + \frac{1}{2}\operatorname{sh} 2\varphi\right) = \frac{K^2}{2}(\varphi + \operatorname{sh} \varphi \cdot \operatorname{ch} \varphi)$$

$$= \frac{K^2}{2}\left(\varphi + \frac{u}{K} \cdot \sqrt{\frac{u^2}{K^2} + 1}\right).$$

Se calcularía φ como en el primer ejemplo, de donde finalmente

$$I = \frac{K^2}{2}\left[\operatorname{Log}\left(\frac{u + \sqrt{u^2 + K^2}}{K}\right) + \frac{u\sqrt{u^2 + K^2}}{K^2}\right]$$

$$= 50\left[\operatorname{Log}\left(\frac{x + 12 + \sqrt{x^2 + 24x + 244}}{10}\right) + \frac{(x + 12)\sqrt{x^2 + 24x + 244}}{100}\right]$$

NOTA. — Se utilizaría este mismo procedimiento para integrar la siguiente expresión:

$$I = \int \frac{(x^2 + 5x - 7)dx}{\sqrt{x^2 + 4x + 12}} = \int \frac{(x^2 + 4x + 12)dx}{\sqrt{x^2 + 4x + 12}} + \int \frac{(x - 19)dx}{\sqrt{x^2 + 4x + 12}}$$

$$= \int \sqrt{x^2 + 4x + 12}\,dx + \frac{1}{2}\int \frac{(2x + 4)dx}{\sqrt{x^2 + 4x + 12}} - \int \frac{21dx}{\sqrt{x^2 + 4x + 12}},$$

la segunda es de la forma $\dfrac{du}{\sqrt{u}}$, la primera y la tercera integrales se incluyen en el caso precedente, integrándose mediante las líneas hiperbólicas. Finalmente, hallaríamos

$$I = -17 \operatorname{Log}\left(\frac{x + 2 + \sqrt{x^2 + 4x + 12}}{2\sqrt{2}}\right) + \frac{1}{2}(x + 4)\sqrt{x^2 + 4x + 12}.$$

3.° *Sea calcular* $\quad I = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 16x + 36}}.$

— Se tiene

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt{(x + 8)^2 - 28}}.$$

Hagamos

$$x + 8 = u, \qquad dx = du \qquad \text{y} \qquad 28 = K^2.$$

A continuación haremos

$$u = K \operatorname{ch} \varphi \qquad \text{de donde} \qquad du = K \operatorname{sh} \varphi\, d\varphi,$$

$$I = \int \frac{du}{\sqrt{K^2 \operatorname{ch}^2 \varphi - K^2}} = \frac{1}{K}\int \frac{K \operatorname{sh} \varphi\, d\varphi}{\sqrt{\operatorname{ch}^2 \varphi - 1}} = \int \frac{\operatorname{sh} \varphi\, d\varphi}{\operatorname{sh} \varphi} = \int d\varphi = \varphi.$$

Para calcular φ se puede operar como en el primer ejemplo, pero, a título de ejercicio, hagámoslo como sigue:

Se tiene

$$\operatorname{ch}\varphi = \frac{u}{K} = \frac{1}{2}(e^{\varphi} + e^{-\varphi})$$

o bien

$$\frac{2u}{K} = e^{\varphi} + \frac{1}{e^{\varphi}}$$

$$e^{2\varphi} - \frac{2u}{K}e^{\varphi} = -1.$$

Sumemos a cada miembro $\frac{u^2}{K^2}$

$$e^{2\varphi} - \frac{2u}{K}e^{\varphi} + \frac{u^2}{K^2} = \frac{u^2}{K^2} - 1 = \frac{u^2 - K^2}{K^2},$$

pero el de la izquierda es el cuadrado de $\left(e^{\varphi} - \frac{u}{K}\right)$, luego

$$e^{\varphi} - \frac{u}{K} = \frac{\sqrt{u^2 - K^2}}{K}$$

$$e^{\varphi} = \frac{u}{K} + \frac{\sqrt{u^2 - K^2}}{K}$$

y

$$\varphi = \operatorname{Log}\left(\frac{u}{K} + \frac{\sqrt{u^2 - K^2}}{K}\right) \qquad (K = \sqrt{28})$$

de donde

$$I = \operatorname{Log}\left(\frac{x + 8 + \sqrt{x^2 + 16x + 36}}{\sqrt{28}}\right).$$

4.° *Sea calcular* $I = \int \sqrt{x^2 - 10x + 20}\,dx.$

— Se tiene

$$I = \int \sqrt{(x-5)^2 - 5}\,dx.$$

Hagamos

$$x - 5 = u \qquad \text{y} \qquad 5 = K^2,$$

y luego

$$u = K \operatorname{ch}\varphi \qquad \text{de donde} \qquad du = K \operatorname{sh}\varphi\, d\varphi.$$

Se tendrá

$$I = \int \sqrt{K^2 \operatorname{ch}^2 \varphi - K^2} \cdot K \operatorname{sh} \varphi \, d\varphi$$

$$= K^2 \int \sqrt{\operatorname{ch}^2 \varphi - 1} \cdot \operatorname{sh} \varphi \, d\varphi = K^2 \int \operatorname{sh}^2 \varphi \, d\varphi$$

$$= \frac{K^2}{2} \int (\operatorname{ch} 2\varphi - 1) d\varphi \qquad (\text{ya que} \quad \operatorname{ch} 2\varphi = 2 \operatorname{sh}^2 \varphi + 1)$$

$$= \frac{K^2}{2} \left[\frac{1}{2} \operatorname{sh} 2\varphi - \varphi \right] = \frac{K^2}{2} [\operatorname{sh} \varphi \cdot \operatorname{ch} \varphi - \varphi]$$

$$= \frac{K^2}{2} \left[\sqrt{\frac{u^2}{K^2} - 1} \cdot \frac{u}{K} - \operatorname{Log} \left(\frac{u + \sqrt{u^2 - K^2}}{K} \right) \right]$$

$$= \frac{5}{2} \left[\frac{(x-5)\sqrt{(x-5)^2 - 5}}{5} - \operatorname{Log} \left(\frac{x - 5 + \sqrt{(x-5)^2 - 5}}{\sqrt{5}} \right) \right].$$

Se ve así cómo las líneas hiperbólicas facilitan el cálculo de todas las integrales que contienen un trinomio de segundo grado bajo un radical, las cuales serían muy largas de calcular (al menos algunas de ellas) por otros medios.

Hemos dado estos ejemplos para que el lector pueda familiarizarse con el empleo de las líneas hiperbólicas, lo que podrá parecer muy complicado a un principiante, pero lo cual no es cierto, a condición de estar iniciado a esta clase de cálculo.

NOTA. — En l'Agenda *Dunod*: «*Matemáticas*», de M. DENIS-PAPIN, se hallará una tabla de las exponenciales e^x, e^{-x}, así como de sh x y ch x, desde $x = 0{,}1$ a $x = 5$, puesto que por encima de 5 se puede confundir sh x y ch x con $\frac{e^x}{2}$.

También se hallarán tablas análogas en el Tomo I del *Mémento d'Electrotechnique* de CURCHOD (Editor *Dunod*) y en las *Tables Universelles* de MARCEL BOLL (Editor *Dunod*).

CAPITULO XIII

LONGITUD DE LAS CURVAS

62. Cálculo de la longitud de una curva. —Sea una curva $y=f(x)$. Se trata de calcular la longitud de la curva comprendida entre dos puntos A y B de abscisas a y b (fig. 46).

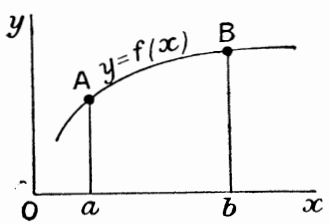


FIG. 46

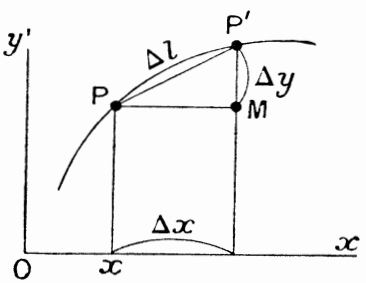


FIG. 47

—Sea, en la figura 47, un punto P cualquiera de abscisa x y de ordenada y, y sea $x + \Delta x$ la abscisa de un punto P', cercano. Llamemos Δl a la longitud del arco PP'. Se tiene

$$(\text{cuerda PP}')^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2$$

o bien

$$\left(\frac{\text{cuerda PP}'}{\Delta x}\right)^2 = 1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2.$$

Pasemos al límite: si Δx tiende a cero, igualmente lo hará Δy. Pero la relación $\dfrac{\text{cuerda PP}'}{\Delta x}$ es un cociente de dos infinitésimos, y se sabe (ver cálculo diferencial) que la relación

$$\frac{\text{cuerda PP}'}{\text{arco PP}'} \to 1 \qquad \text{cuando} \qquad \Delta x \to 0,$$

dicho de otra forma, los dos infinitésimos *cuerda* PP' y *arco* PP' son

equivalentes, y por eso en el límite se puede remplazar uno por otro, escribiéndose entonces

$$\text{límite de } \left(\frac{\text{arc PP}'}{\Delta x}_{\searrow 0}\right)^2 = 1 + \lim \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}_{\searrow 0}\right)^2 = 1 + y'^2$$

o bien

$$\text{límite de } \left(\frac{\Delta l}{\Delta x}_{\searrow 0}\right)^2 = 1 + y'^2$$

es decir

$$l_x' = \frac{dl}{dx} = \sqrt{1 + y'^2}$$

luego

$$dl = \sqrt{1 + y'^2}\, dx.$$

La longitud total será finalmente:

$$\boxed{l = \int_a^b dl = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2} dx}$$

—Se puede también escribir

$$dl^2 = \left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right] \cdot dx^2$$

o bien

$$dl^2 = dx^2 + dy^2$$

luego

$$\boxed{dl = \sqrt{dx^2 + dy^2}}$$

que se hubiera podido escribir desde el principio tomando las diferenciales y diciendo: si x aumenta en dx, y varía en una cantidad dy, y, tomando en vez del arco dl la cuerda PP′ (ya que ambos sólo difieren en un infinitésimo de segundo orden), el teorema de *Pitágoras* nos da inmediatamente

$$dl^2 = dx^2 + dy^2,$$

siendo dl la parte principal del arco PP′; e, integrando, como anteriormente, de $x = a$ a $x = b$, se tendrá la longitud *rigurosamente exacta* de la curva de A a B.

63. Ejemplos. — 1.º *Cálculo de la longitud de la circunferencia*:

$$x^2 + y^2 = R^2.$$

— Se tiene

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{f_x'}{f_y'} = -\frac{2x}{2y} = -\frac{x}{y}$$

de donde

$$dl = \sqrt{1 + \frac{x^2}{y^2}}\, dx.$$

La longitud total se obtendrá haciendo variar x de 0 a R y multiplicando por 4;

$$l = 4\int_0^R \sqrt{1 + \frac{x^2}{y^2}}\, dx = 4\int_0^R \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{y^2}}\, dx$$

$$= 4\int_0^R \sqrt{\frac{R^2}{R^2 - x^2}}\, dx = 4R\int_0^R \frac{dx}{\sqrt{R^2 - x^2}}$$

$$= 4R\left[\text{arc sen}\,\frac{x}{R}\right]_0^R = 4R\left[\frac{\pi}{2} - 0\right] = 2\pi R.$$

2.º *Longitud de la curva* $y^2 = 8x^3$, *de* $x = 1$ *a* $x = 3$.

— Se tiene

$$y = 2\sqrt{2}x^{3/2} \qquad \text{y} \qquad \frac{dy}{dx} = 3\sqrt{2}x^{1/2},$$

y

$$l = \int_1^3 \sqrt{1 + 18x}\, dx$$

$$= \int_1^3 \sqrt{u} \cdot \frac{du}{18} = \frac{1}{18} \cdot \frac{2}{3}\,[u^{3/2}]$$

$$= \frac{1}{27}\,[\sqrt{(1 + 18x)^3}]_1^3$$

$$= \frac{1}{27}\,[\sqrt{(1 + 54)^3} - \sqrt{19^3}] = 12.$$

3.° *Longitud de la curva* $y^2 = 8x$, de $x = 2$ a $x = 4$.

Se tiene

$$y = \sqrt{8x} \quad \text{y} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{8x}} \cdot 8 = \frac{4}{\sqrt{8x}}$$

de donde

$$l = \int_2^4 \sqrt{1 + \frac{16}{8x}}\, dx.$$

Siendo esta integral bastante complicada, se facilita el trabajo escribiendo:

$$dl = \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

$$= \sqrt{1 + \frac{dx^2}{dy^2}} \cdot dy$$

luego

$$l = \int \sqrt{1 + x'^2} \cdot dy$$

pero

$$x = \frac{y^2}{8} \quad \text{y} \quad x' = \frac{y}{4}.$$

Los nuevos límites de y son:

para $x = 2$ se tiene $y^2 = 16$ e $y = 4$,

para $x = 4$ se tiene $y^2 = 32$ e $y = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$

por tanto

$$l = \int_4^{4\sqrt{2}} \sqrt{1 + \frac{y^2}{16}} \cdot dy = \frac{1}{4} \int_4^{4\sqrt{2}} \sqrt{16 + y^2}\, dy.$$

Hagamos

$$y = 4 \operatorname{sh} \varphi \qquad dy = 4 \operatorname{ch} \varphi\, d\varphi,$$

de donde

$$l = \frac{1}{4} \int \sqrt{16(1 + \operatorname{sh}^2 \varphi)} \cdot 4 \operatorname{ch} \varphi\, d\varphi = 4 \int \operatorname{ch}^2 \varphi\, d\varphi$$

$$= 2 \int (1 + \operatorname{ch} 2\varphi) d\varphi = 2[\varphi + \frac{1}{2} \operatorname{sh} 2\varphi],$$

pero, ya hemos calculado una integral parecida:

$$l = 2[\varphi + \operatorname{sh}\varphi \cdot \operatorname{ch}\varphi]$$

$$l = 2\left[\operatorname{Log}\left(\frac{y + \sqrt{16 + y^2}}{4}\right) + \frac{y\sqrt{16 + y^2}}{16}\right]_4^{4\sqrt{2}}$$

$$= 2\left[\operatorname{Log}\left(\frac{4\sqrt{2} + 4\sqrt{3}}{4}\right) - \operatorname{Log}\left(\frac{4 + 4\sqrt{2}}{4}\right) + \frac{16\sqrt{6}}{16} - \frac{16\sqrt{2}}{16}\right]$$

$$= 2\left[\operatorname{Log}\left(\frac{\sqrt{2} + \sqrt{3}}{\sqrt{2} + 1}\right) + \sqrt{6} - \sqrt{2}\right] = 2{,}6.$$

A título de ejercicio, hagamos el cálculo sin pasar por las líneas hiperbólicas; sea la parábola

$$y^2 = 2px.$$

Se tiene

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{2px}} \cdot 2p = \sqrt{\frac{p}{2x}}$$

y

$$l = \int_0^x \sqrt{1 + \frac{p}{2x}}\, dx = \int_0^x \sqrt{\frac{2x + p}{2x}}\, dx.$$

Hagamos

$$\frac{2x + p}{2x} = u^2 \qquad \text{de donde} \qquad x = \frac{p}{2(u^2 - 1)}$$

y

$$dx = -\frac{p}{2}\frac{2u\, du}{(u^2 - 1)^2},$$

los nuevos límites son:

$$\text{para} \quad x = 0 \qquad u = \infty$$

y

$$\text{para} \quad x = x \qquad u = u.$$

Se tendrá

$$l = \int_\infty^u \sqrt{u^2}\left(-p\frac{u\, du}{(u^2 - 1)^2}\right) = \int_\infty^u -p\frac{u^2\, du}{(u^2 - 1)^2}$$

pero

$$\frac{u^2}{(u^2-1)^2} \equiv \frac{A_2}{(u-1)^2} + \frac{A_1}{u-1} + \frac{B_2}{(u+1)^2} + \frac{B_1}{u+1};$$

se halla

$$A_1 = B_2 = A_2 = \frac{1}{4} \qquad \text{y} \qquad B_1 = -\frac{1}{4}$$

de donde, integrando

$$l = -\frac{p}{4}\left[-\frac{1}{u-1} - \frac{1}{u+1} + \operatorname{Log}\frac{u-1}{u+1}\right]_{\infty}^{u};$$

basta con reemplazar u por $1 + \frac{p}{2x}$, y, pasando a los límites, queda

$$l = \frac{p}{4}\left[\frac{2\sqrt{1+\frac{p}{2x}}}{\frac{p}{2x}} + \operatorname{Log}\frac{1+\sqrt{1+\frac{p}{2x}}}{1-\sqrt{1+\frac{p}{2x}}}\right].$$

Se ve de esta forma la facilidad que introduce el empleo de las líneas hiperbólicas.

64. Longitud y estudio detallado de la catenaria. — Vamos a aprovechar este ejemplo para establecer la ecuación de la catenaria, *lo que es muy instructivo desde el punto de vista matemático.*

Ecuación de la catenaria (fig. 48).

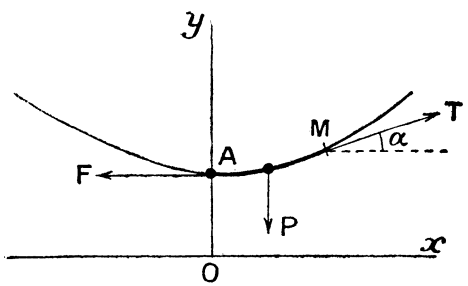


FIG. 48

—La catenaria es la forma de curva que adquiere una cuerda flexible, sujeta en sus dos extremos, y que pende bajo la acción de su peso; la misma forma adquiere una línea eléctrica aérea o una cadena metálica flexible.

Consideremos aislada del resto la parte AM, en la que A es el punto más bajo; está sometida a tres fuerzas: la tracción T tangente en M, la tracción F horizontal y el peso $P = p \cdot l$ llamando p al peso por unidad de longitud y l a la longitud AM.

—Escribamos que este fragmento AM está en equilibrio bajo la acción de estas tres fuerzas. Proyectemos

sobre Ox:

$$T \cos \alpha = F$$

sobre Oy:

$$T \operatorname{sen} \alpha = P = pl$$

de donde

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{pl}{F} = \frac{dy}{dx},$$

o, poniendo

$$a = \frac{F}{p}$$

$$l = \frac{F}{p}\frac{dy}{dx} = a\frac{dy}{dx}$$

Derivemos

$$a\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dl}{dx} = \frac{\sqrt{1 + y'^2}\,dx}{dx}$$

o bien

$$a\frac{d^2y}{dx^2} = \sqrt{1 + y'^2},$$

ecuación diferencial de segundo orden que se resuelve fácilmente, haciendo $\frac{dy}{dx} = u$, lo que da

$$a\frac{du}{dx} = \sqrt{1 + u^2}$$

Separemos las variables

$$\frac{du}{\sqrt{1 + u^2}} = \frac{dx}{a}$$

integremos

$$\int \frac{du}{\sqrt{1+u^2}} = \int \frac{dx}{a} + C$$

$$\text{Log}\,(u + \sqrt{1+u^2}) = \frac{x}{a} + C.$$

Calculemos C: para $x = 0$, $u = y' = 0$, luego $C = 0$, y queda

$$u + \sqrt{1+u^2} = e^{\frac{x}{a}},$$

elevemos al cuadrado

$$u^2 + (1+u^2) + 2u\sqrt{1+u^2} = e^{\frac{2x}{a}}$$

$$2u^2 + 1 + 2u(e^{\frac{x}{a}} - u) = e^{\frac{2x}{a}}$$

$$1 + 2ue^{\frac{x}{a}} = e^{\frac{2x}{a}}$$

$$2u = \frac{e^{\frac{2x}{a}} - 1}{e^{\frac{x}{a}}} = e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}$$

luego

$$u = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}\right)$$

de donde

$$y = \frac{1}{2}\int \left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}\right) dx = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right) + C'.$$

Tomemos el eje de las x (cuya distancia OA es todavía cualquiera) para que la distancia OA sea igual a a, lo que da

$$y_0 = a = \frac{a}{2}(1+1) + C' \quad \text{de donde} \quad C' = 0,$$

y, finalmente

$$\boxed{y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)}$$

que es la ecuación buscada de la catenaria.

— Desde el punto de vista práctico, es cómodo reemplazar este valor por su desarrollo en serie de MAC-LAURIN, hallándose fácilmente (tomo II):

$$y = a\left(1 + \frac{x^2}{2!a^2} + \frac{x^4}{4!a^4} + \frac{x^6}{6!a^6} + \ldots\right).$$

Pero, en general, $a = \frac{F}{p}$ es grande, ya que p es pequeña, luego, despreciando los términos por encima de x^2, queda

$$y = a\left(1 + \frac{x^2}{2a^2}\right) = a + \frac{x^2}{2a}$$

que es una parábola. Es decir que la catenaria difiere muy poco de una parábola, tanto menos cuanto más pequeña es x.

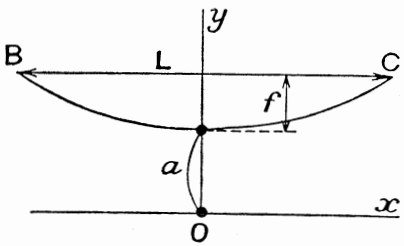


FIG. 49

— Calculemos la flecha f llamando L a la longitud del vano (fig. 49). Ahora bien, $y_B = y_C$ y la flecha f se obtiene hallando la diferencia entre y_B y a $\left(\text{para } x = \frac{L}{2}\right)$, es decir

$$y - a = \frac{x^2}{2a} = \frac{x^2}{2\frac{F}{p}} = \frac{px^2}{2F} = \frac{pL^2}{8F}$$

donde f está en metros, L también en metros, p en kilogramos-fuerza por metro y F en kilogramos-fuerza.

Hemos supuesto que los puntos de apoyo estaban a la misma altura, por ser éste el caso general.

Longitud de la curva.

Hagamos primeramente un cálculo simplificado. Se tiene

$$dl = \sqrt{1 + y'^2}\, dx$$

pero la pendiente y' es siempre pequeña, su cuadrado es pequeño respecto de 1 y se sabe que $\sqrt{1 + x^2}$ desarrollada en serie de MAC-LAURIN da en este caso:

$$\sqrt{1 + x^2} \simeq 1 + \frac{x^2}{2}.$$

Tomando la ecuación de la parábola, se tiene $y' = \frac{x}{a}$, de donde

$$dl = \sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2}} \cdot dx \simeq \left(1 + \frac{x^2}{2a^2}\right) dx$$

y

$$l = \int_{-\frac{L}{2}}^{+\frac{L}{2}} \left(1 + \frac{x^2}{2a^2}\right) dx = L + \frac{L^3}{24a^2}.$$

Un cálculo más exacto daría

$$l = \int \sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2}}\, dx$$

que se integraría mediante las líneas hiperbólicas, como ya vimos en otro ejemplo, haciendo $\frac{x}{a} = \operatorname{sh} \varphi$ Invitamos al lector a hacer este cálculo, integrando de 0 a $\frac{L}{2}$ y duplicando.

— Pero se puede calcular de otra forma la longitud l de la curva, tomando la ecuación de la catenaria y utilizando entonces las líneas hiperbólicas.

Se tiene

$$y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right) = a \cdot \operatorname{ch} \frac{x}{a}$$

de donde

$$y' = a \cdot \operatorname{sh} \frac{x}{a} \cdot \frac{1}{a} = \operatorname{sh} \frac{x}{a},$$

y se tendrá

$$l = \int \sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 \frac{x}{a}} \cdot dx = a \int \operatorname{ch} \frac{x}{a} \frac{dx}{a} = a \cdot \operatorname{sh} \frac{x}{a} = \frac{a}{2} \left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}} \right)$$

basta entonces con tomar límites cualesquiera.

Vemos así cómo se simplifica el cálculo gracias a las líneas hiperbólicas.

65. Caso en que la curva está dada en forma paramétrica. — Sea la curva

$$x = f(\theta) \qquad y = \varphi(\theta),$$

se aplica entonces la fórmula

$$\boxed{l = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{dx^2 + dy^2}}$$

Conociendo los límites entre los que varían x e y, se deduce los límites del ángulo θ.

Ejemplos.

1.° *Longitud de la cicloide.* — Sea un círculo generador tal que R = 1. Anteriormente hemos establecido la ecuación de la cicloide

$$\begin{cases} x = \theta - \operatorname{sen} \theta \\ y = 1 - \cos \theta \end{cases}$$

donde θ varía de 0 a 2π, cuando el círculo da una vuelta.

— Se tendrá

$$l = \int_0^{2\pi} \sqrt{dx^2 + dy^2} = \int_0^{2\pi} \sqrt{(1 - \cos\theta)^2 + \operatorname{sen}^2 \theta} \cdot d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{2(1 - \cos\theta)} d\theta = \int_0^{2\pi} 2 \sqrt{4 \operatorname{sen}^2 \frac{\theta}{2}} \frac{d\theta}{2} = -4 \left[\cos \frac{\theta}{2} \right]_0^{2\pi} = 8.$$

Si $R \neq 1$, se hallaría $l = 8R$.

2.° *Calcular la longitud de la curva*

$$y = 2\sqrt{2}(\sqrt{1 + x} + \sqrt{1 - x}).$$

— Hagamos desaparecer los radicales poniendo

$x = \cos 2\varphi$ de donde $dx = -2 \operatorname{sen} 2\varphi \, d\varphi = -4 \operatorname{sen} \varphi \cos \varphi \, d\varphi$

Se tiene

$$\sqrt{1+x} = \sqrt{1+\cos 2\varphi} = \sqrt{2\cos^2\varphi} = \sqrt{2}\cos\varphi$$

y

$$\sqrt{1-x} = \sqrt{1-\cos 2\varphi} = \sqrt{2\operatorname{sen}^2\varphi} = \sqrt{2}\operatorname{sen}\varphi,$$

de donde quedará

$$y = 2\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}\,(\cos\varphi + \operatorname{sen}\varphi) \quad \text{y} \quad dy = 4(\cos\varphi - \operatorname{sen}\varphi)d\varphi.$$

Se tendrá entonces

$$dl^2 = dx^2 + dy^2 = 16[\operatorname{sen}^2\varphi\cos^2\varphi + (\cos\varphi - \operatorname{sen}\varphi)^2]d\varphi^2$$
$$= 16[\operatorname{sen}^2\varphi\cos^2\varphi + 1 - 2\operatorname{sen}\varphi\cos\varphi]d\varphi^2 = 16(1-\operatorname{sen}\varphi\cos\varphi)^2 d\varphi^2$$

y

$$l = \int_0^{\varphi} 4(1-\operatorname{sen}\varphi\cos\varphi)d\varphi$$

$$= 4\int_0^{\varphi} d\varphi - 4\int_0^{\varphi} \operatorname{sen}\varphi\cdot\cos\varphi\, d\varphi = 4\varphi - 2\operatorname{sen}^2\varphi.$$

se reemplazaría φ y x por los límites elegidos.

66. Caso en que la curva está en coordenadas polares $\rho = f(\theta)$. — Refiriéndonos a la figura 39, ya utilizada al hablar del cálculo de las superficies, se tiene, para un punto cualquiera de la curva:

$$x = \rho\cos\theta \qquad y = \rho\operatorname{sen}\theta.$$

Pero ρ y θ son variables, y diferenciando tendremos:

$$dx = \cos\theta\cdot d\rho - \rho\cdot\operatorname{sen}\theta\, d\theta$$
$$dy = \operatorname{sen}\theta\cdot d\rho + \rho\cdot\cos\theta\, d\theta,$$

lo que da

$$dl^2 = dx^2 + dy^2 = (\cos\theta\cdot d\rho - \rho\cdot\operatorname{sen}\theta\, d\theta)^2 + (\operatorname{sen}\theta\cdot d\rho + \rho\cdot\cos\theta\, d\theta)^2$$

$$= d\rho^2 + \rho^2\cdot d\theta^2 = \left[\rho^2 + \left(\frac{d\rho}{d\theta}\right)^2\right] d\theta^2$$

luego

$$dl = \sqrt{\rho^2 + \rho'^2}\, d\theta$$

y

$$\boxed{l = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{\rho^2 + \rho'^2}\, d\theta}$$

Ejemplos.

1.° *Longitud de la circunferencia* $\rho = R = C^{te}$. El ángulo θ varía de 0 a 2π.

Se tiene

$$i = \int_0^{2\pi} \sqrt{\rho^2 + 0}\, d\theta = \int_0^{2\pi} R d\theta = 2\pi R.$$

2.° *Longitud de la cardioide* (fig. 33):

$$\rho = a(1 + \cos\theta).$$

Se tiene

$$\rho' = -a \operatorname{sen}\theta,$$

y

$$dl = \sqrt{a^2(1 + \cos\theta)^2 + a^2 \operatorname{sen}^2\theta} \cdot d\theta = a\sqrt{2(1 + \cos\theta)}\, d\theta = 2a \cos\frac{\theta}{2} d\theta.$$

Se puede hacer variar θ de 0 a π, y duplicar para tener la longitud total, pues la curva es simétrica,

$$l = 2\int_0^{\pi} 2a \cos\frac{\theta}{2} \cdot d\theta = 8a\left[\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}\right]_0^{\pi} = 8a.$$

3.° *Longitud de la espiral logarítmica* (fig. 50).

$$\rho = ae^{\theta},$$

— Se tiene

$$\rho' = ae^{\theta},$$

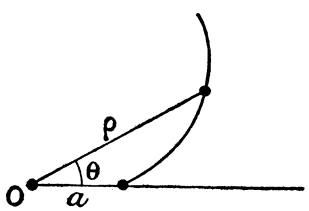


FIG. 50

y, si θ varía de 0 a 2π

$$l = \int_0^{2\pi} \sqrt{\rho^2 + \rho'^2}\, d\theta = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 + a^2} \cdot e^{\theta}\, d\theta = a\sqrt{2}\left[e^{\theta}\right]_0^{2\pi} = a\sqrt{2}[e^{2\pi} - 1]$$

CAPITULO XIV

CALCULO DE LOS VOLUMENES DE REVOLUCION

67. Establecimiento de la fórmula. — Sea una curva $y = f(x)$ y consideremos dos abscisas cualesquiera, a y b (figs. 51 y 52), cuyas ordenadas son A y B. Si la superficie plana $AaBb$ gira alrededor del eje de las x, situado en el plano de la curva, haciendo un giro completo, engendra un volumen de revolución, del cual vamos a calcular su valor.

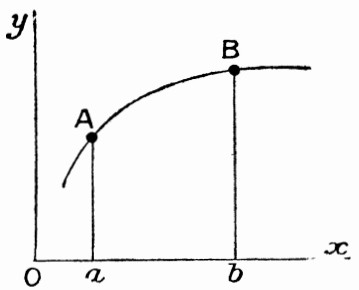


FIG. 51

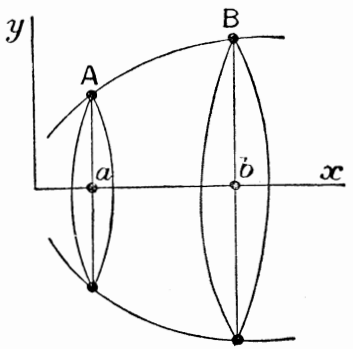


FIG. 52

— Para ello, situémonos en un punto cualquiera P, de abscisa x y de ordenada y (fig. 53), y sea $x + dx$ la abscisa de un punto próximo; se obtiene un pequeño trapecio curvilíneo cuya parte principal es el rectángulo de superficie $y\,dx$. Si este rectángulo gira alrededor del eje Ox dando un giro completo, engendra un volumen, el volumen de un disco que es el de un cilindro cuyo espesor es dx y cuya superficie de base es πy^2. Se tendrá, pues, llamando dV a la

parte principal del volumen engendrado por el trapecio elemental:

$$dV = \pi y^2\,dx,$$

y el volumen total engendrado será

$$\boxed{V = \int_a^b \pi y^2\,dx}$$

Esta integral es, en general fácil de calcular.

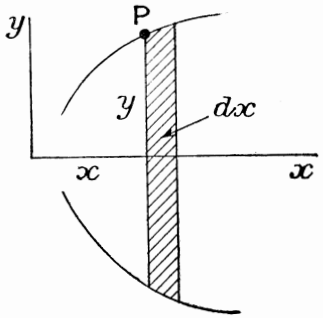


FIG. 53

— Si se conoce la ecuación de la curva, se está en posesión *de una sola fórmula* muy general, mientras que en geometría ordinaria se necesitan tantas fórmulas como volúmenes diferentes hay.

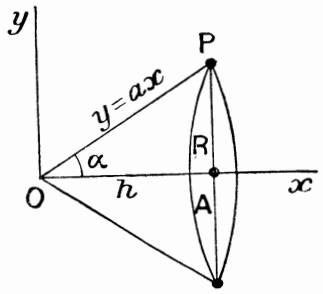


FIG. 54

Ejemplos.

1.° *Volumen del cono recto* (fig. 54).

— Sea la recta $y = ax$. Si el triángulo OAP gira alrededor de Ox, engendra un cono cuyo volumen es

$$V = \int_0^h \pi y^2\,dx,$$

pero, tenemos $y = ax$, con $a = \operatorname{tg}\alpha = \dfrac{R}{h}$, de donde

$$V = \pi\frac{R^2}{h^2}\int_0^h x^2\,dx = \frac{\pi R^2}{h^2}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^h = \frac{1}{3}\pi R^2 h.$$

Se vuelve a encontrar, de esta forma, la misma fórmula que se halló en la geometría elemental.

2.° *Volumen de la esfera* (fig. 55).

— Una esfera está engendrada por la superficie de un semicírculo que gira alrededor de su diámetro. La ecuación de la curva es:

$$x^2 + y^2 = R^2.$$

Se puede integrar de —R a + R, o mejor aún de 0 a R y duplicar

$$V = 2\int_0^R \pi(R^2 - x^2)dx = 2\pi\left[\int R^2 dx - \int x^2\,dx\right]_0^R$$

$$= 2\pi\left[R^2[x]_0^R - \frac{1}{3}[x^3]_0^R\right] = 2\pi\left(R^3 - \frac{R^3}{3}\right) = \frac{4}{3}\pi R^3$$

Se halla así la fórmula ya conocida.

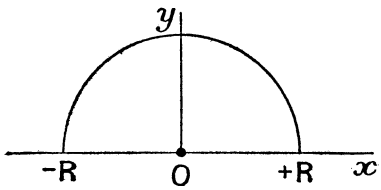


FIG. 55

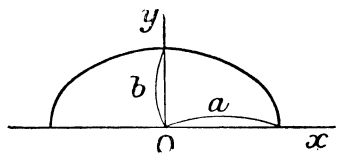


FIG. 56

3.° *Volumen del elipsoide* (fig. 56).

— En lugar de un círculo tomemos la elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

donde a es el semieje horizontal.

Si gira alrededor del eje Ox se tendrá

$$V = 2\int_0^a \pi y^2 dx = 2\int_0^a \frac{\pi b^2}{a^2}(a^2 - x^2)dx$$

$$= \frac{2\pi b^2}{a^2}\left[a^2 x - \frac{x^3}{3}\right]_0^a = 2\pi\frac{b^2}{a^2}\left(a^3 - \frac{4}{3}\right) = \frac{4}{3}\pi a b^2$$

4.° *Volumen engendrado por la curva* $y = 5x^3$, *desde* $x = 1$ *hasta* $x = 2$.

— Se sabe que es una parábola de eje vertical. El volumen engendrado será:

$$V = \pi\int_1^2 y^2 dx = \pi\int_1^2 25x^4 dx = 25\pi\left[\frac{x^5}{5}\right]_1^2 = 5\pi(2^5 - 1) = 486{,}8.$$

5.° *Volumen engendrado por la curva* $y = e^x$ *desde* $x = -\infty$ *hasta* $x = 0$ (fig. 57).

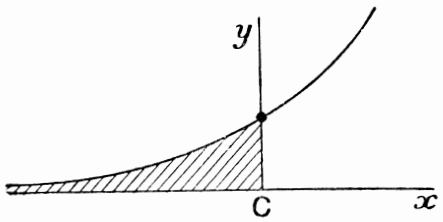


FIG. 57

Se tiene

$$V = \pi \int_{-\infty} e^{2x}\,dx = \frac{\pi}{2}\left[e^{2x}\right]_{-\infty}^{0} = \frac{\pi}{2}(1 - e^{-\infty}) = \frac{\pi}{2},$$

resultado curioso: este volumen es finito aunque la abscisa sea infinita.

6.° *Volumen engendrado por la cicloide girando alrededor del eje de las x.*

— Hemos establecido la ecuación de la cicloide cuando calculamos la superficie de esta curva, y en forma paramétrica esta curva está dada por

$$x = R(\theta - \operatorname{sen}\theta) \qquad \text{e} \qquad y = R(1 - \cos\theta).$$

El volumen engendrado (variando el ángulo θ de 0 a 2π cuando el círculo generador da una vuelta completa) es:

$$V = \pi \int_0^{2\pi} y^2 dx = \pi \int_0^{2\pi} R^2(1 - \cos\theta)^2 \cdot R(1 - \cos\theta)d\theta$$

$$= \pi R^3 \int_0^{2\pi} (1 - \cos\theta)^3 d\theta = \pi R^3 \int_0^{2\pi} (1 - 3\cos\theta + 3\cos^2\theta - \cos^3\theta)d\theta$$

$$= \pi R^3 \int_0^{2\pi} \left[1 - 3\cos\theta + \frac{3}{2}(1 + \cos 2\theta) - \frac{1}{4}(\cos 3\theta + 3\cos\theta\right] d\theta$$

$$= \pi R^3 \int_0^{2\pi} \left[\frac{5}{2} - \frac{15}{4}\cos\theta + \frac{3}{2}\cos 2\theta - \frac{1}{4}\cos 3\theta\right] d\theta$$

$$= \pi R^3 \left[\frac{5\theta}{2} - \frac{15}{4}\operatorname{sen}\theta + \frac{3}{4}\operatorname{sen} 2\theta - \frac{1}{12}\operatorname{sen} 3\theta\right]_0^{2\pi}.$$

Los tres últimos términos en *sen* θ, sen 2θ y *sen* 3θ son nulos entre 0 y 2π, no quedando más que el primer término, de donde:

$$V = 5\pi^2 R^3.$$

Si

$$R = 1 \text{ metro}, \qquad V = 50 \text{ m}^3 \qquad (\pi^2 = 10).$$

NOTA. — Si, en lugar del volumen engendrado por una superficie cualquiera que gira alrededor del eje de las x, se buscara el volumen engendrado por la superficie que gira alrededor del eje de las y, se tendría, evidentemente:

$$V = \int_{y_1}^{y_2} \pi x^2 dy.$$

Ejemplo.

Calcular el volumen del paraboloide engendrado por la parábola $y = 5x^2$ *girando alrededor del eje de las y, desde* $x = 0$ *hasta* $x = 2$.

Para $x = 0$ $y = 0$

y para $x = 2$ $y = 20$,

$$V = \int_0^{20} \pi x^2 dy = \pi \int_0^{20} \frac{y}{5} dy = \frac{\pi}{5} \left[\frac{y^2}{2}\right]_0^{20} = \frac{\pi}{10} [20^2 - 0] = 40\pi.$$

68. Volumen engendrado por una superficie plana cerrada que gira alrededor de un eje. — Sea una curva *cerrada* C situada en el plano de la figura. Supongamos que esta curva gira alrededor del eje de las x y calculemos el volumen engendrado por esta superficie S (fig. 58). Tracemos las tangentes extremas a la curva, en A y en B, y llevemos una paràlela al eje de las y, de abscisa x; dicha paralela corta a la curva en dos puntos, M_1 y M_2, cuyas ordenadas son y_1 e y_2.

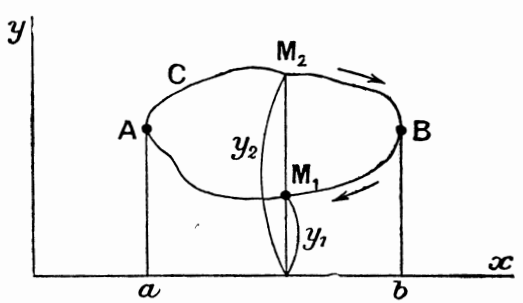


FIG. 58

El volumen engendrado por la curva C es, evidentemente, la diferencia de los volúmenes engendrados por las superficies aAM_2Bb y aAM_1Bb, es decir

$$V = \int_a^b \pi y_2^2 dx - \int_a^b \pi y_1^2 dx = \int_a^b \pi y_2^2 dx + \int_b^a \pi y_1^2 dx$$

que se escribe simbólicamente, girando a lo largo de la curva C siempre en el mismo sentido de las flechas

$$V = \int_C \pi y^2 dx.$$

Para calcular esta integral, basta con expresar x e y en función de un parámetro (que deberá hallarse en cada caso particular y que es, en general, un ángulo θ), de manera que, cuando este parámetro varíe entre dos límites θ_1 y θ_2, se describa la curva C una sola vez:

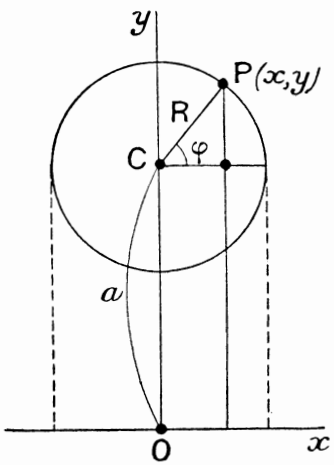


FIG. 59

$$x = f(\theta) \qquad \text{y} \qquad y = \varphi(\theta)$$

de donde

$$V = \int_{\theta_2}^{\theta_1} \pi \varphi^2(\theta) \cdot f'(\theta) d\theta.$$

Ejemplo. *Volumen del toro* (fig. 59).

—Se sabe que un toro es el volumen formado por una cámara de aire (neumático) inflada. Este volumen es engendrado por un círculo que gira alrededor de un eje situado en su plano, de forma que el radio de este círculo sea más pequeño que la distancia del centro del círculo al eje.

—Sea un punto P cualquiera; sus coordenadas son, llamando a la ordenada del centro C del círculo generador (fig. 59):

$$x = R \cos \varphi \qquad y = a + R \operatorname{sen} \varphi,$$

el ángulo φ deberá, pues, variar de 0 a 2π para describir la curva una sola vez, y se tendrá:

$$V = \int_0^{2\pi} \pi y^2 dx = \int_0^{2\pi} \pi(a + R \operatorname{sen} \varphi)^2[-R \operatorname{sen} \varphi]d\varphi$$

$$= -\pi R \int_0^{2\pi} (a^2 + R^2 \operatorname{sen}^2 \varphi + 2a R \operatorname{sen} \varphi) \operatorname{sen} \varphi \, d\varphi$$

$$= -\pi R \left[\int_0^{2\pi} a^2 \operatorname{sen} \varphi \, d\varphi + \int_0^{2\pi} 2aR \operatorname{sen}^2 \varphi \, d\varphi + \int_0^{2\pi} R^2 \operatorname{sen}^3 \varphi \, d\varphi\right]$$

pero, recordaremos que la integral de un seno (o de un coseno) entre 0 y 2π es siempre nula, *cualquiera que sea el valor del ángulo.*

Queda:

$$V = -\pi R \left[0 + 2aR \int_0^{2\pi} \frac{(1 - \cos 2\varphi)}{2} d\varphi + R^2 \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^2 \varphi \cdot \operatorname{sen} \varphi \, d\varphi\right]$$

$$= -\pi R \left[aR \int_0^{2\pi} d\varphi - \frac{aR}{2} \int_0^{2\pi} \cos 2\varphi \cdot 2d\varphi + R^2 \int_0^{2\pi} (1 - \cos^2 \varphi) \operatorname{sen} \varphi \cdot d\varphi\right]$$

$$= -\pi R \left[aR \cdot 2\pi - 0 + R^2 \int_0^{2\pi} \operatorname{sen} \varphi \, d\varphi - R^2 \int_0^{2\pi} \cos^2 \varphi \cdot \operatorname{sen} \varphi \, d\varphi\right]$$

$$= -\pi R \left[2\pi aR - 0 + 0 + \frac{R^2}{3} (\cos^3 \varphi)_0^{2\pi}\right]$$

siendo esta última integran nula, queda, salvo el signo (sería signo + si se integrara de 2π a 0):

$$V = 2\pi^2 R^2 a = \pi R^2 \cdot 2\pi R^2 \cdot 2\pi a.$$

Pero, πR^2 es la superficie S del círculo generador y $2\pi a$ es la circunferencia descrita por el centro de gravedad C del círculo (lo cual es completamente general):

$$V = S \cdot 2\pi a,$$

se halla así nuevamente uno de los teoremas de GULDIN de la Mecánica, que, por otra parte, demostraremos después (párrafo 77).

CAPITULO XV

SUPERFICIE LATERAL DE LOS VOLUMENES DE REVOLUCION

69. Establecimiento de la fórmula. — Dado un volumen de revolución, calculado como se acaba de hacer anteriormente, se trata de calcular la superficie lateral de este volumen; por ejemplo, la superficie de una esfera, de un cono, de una paraboloide, etc.

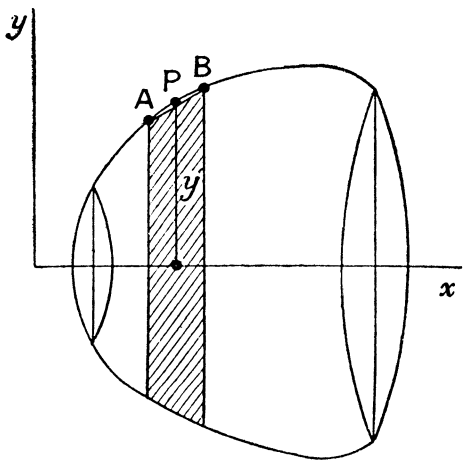


FIG. 60

— Sea una curva $y = f(x)$ y un punto P cualquiera de ordenada y (fig. 60). Consideremos una pequeña rebanada de espesor dx (considerada y en el centro del elemento dx):

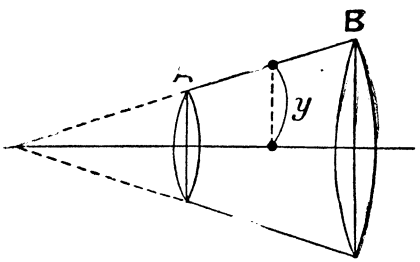


FIG. 61

se puede considerar que tenemos un trapecio infinitamente pequeño, confundiendo el arco de la curva con la cuerda.

Tracemos este trapecio más grande en la figura 61, y sea AB su arista lateral e y la ordenada media. Este trapecio, girando alrededor de Ox, engendra un tronco de cono, cuya superficie lateral es

igual a la del cilindro de radio $R = y$, y cuya altura es igual a la longitud de la arista AB (y *no igual a* dx):

$$dS = 2\pi R \cdot AB = 2\pi y \cdot AB,$$

pero AB es la longitud dl del elemento de arco de curva interceptado

$$dl = \sqrt{1 + y'^2}dx$$

de donde, la superficie total

$$\boxed{S = \int_{x_1}^{x_2} 2\pi y \sqrt{1 + y'^2}dx = \int_{x_1}^{x_2} 2\pi y \, dl}$$

Esta integral es, en general, difícil de calcular a causa de y'^2, que se encuentra bajo el radical.

70. Ejemplos.

1.° *Superficie lateral de un cono* (fig. 62).

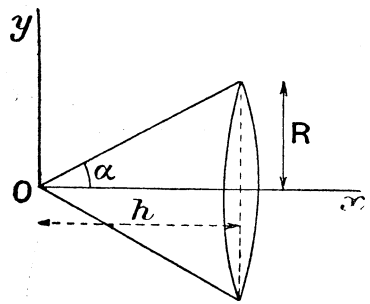


FIG. 62

—La ecuación de la curva que engendra un cono girando alrededor de Ox es la de una recta

$$y = a \cdot x \quad \text{donde} \quad a = \operatorname{tg}\alpha = \frac{R}{h}$$

con

$$y' = a = \frac{R}{h}$$

La superficie lateral del cono será

$$S = \int_0^h 2\pi y \sqrt{1 + y'^2}\, dx = \int_0^h 2\pi \frac{R}{h} x \sqrt{1 + \frac{R^2}{h^2}}\, dx$$

$$= 2\pi \frac{R}{h} \sqrt{\frac{h^2 + R^2}{h^2}} \int_0^h x\, dx,$$

pero $\sqrt{h^2 + R^2}$ es la longtiud l de la arista del cono, y queda:

$$S = \frac{2\pi R}{h^2} l \cdot \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^h = \frac{2\pi R l}{h^2} \cdot \frac{h^2}{2} = \pi R l = 2\pi \frac{R}{2} \cdot l,$$

hallándose un resultado normal, puesto que la fórmula precedente

de S ha sido establecida, basándonos en esta fórmula de la geometría elemental.

2.° *Superficie de la esfera* (fig. 63).

— La esfera está engendrada por el semicírculo de la figura, siendo la ecuación de la curva

$$x^2 + y^2 = R^2 \qquad \text{de donde} \qquad y = \sqrt{R^2 - x^2}.$$

Basta, para tener la superficie total de la esfera, con integrar de 0 a R y duplicar. Se tiene

$$y' = -\frac{x}{\sqrt{R^2 - x^2}} \qquad y \qquad y'^2 = \frac{x^2}{R^2 - x^2},$$

de donde

$$S = 2\int_0^R 2\pi \sqrt{R^2 - x^2} \cdot \sqrt{1 + \frac{x^2}{R^2 - x^2}}\, dx$$

$$= 4\pi \int_0^R \sqrt{R^2 - x^2} \sqrt{\frac{R^2 - x^2 + x^2}{R^2 - x^2}}\, dx$$

$$= 4\pi R \int_0^R dx = 4\pi R^2$$

es decir, cuatro veces la superficie de un círculo.

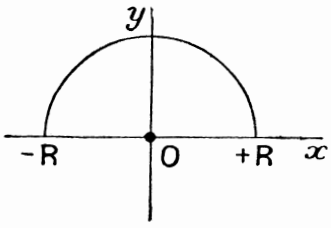


FIG. 63

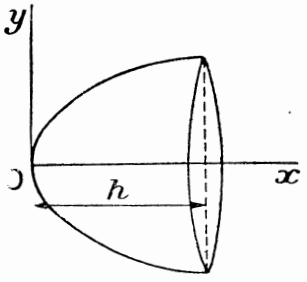


FIG. 64

3.° *Superficie de una paraboloide* (fig. 64). — Una superficie tal es, por ejemplo, la superficie plateada de un espejo parabólico del faro de un coche.

— Sea la parábola

$$y^2 = 4x$$

de donde

$$y = 2\sqrt{x} \quad \text{e} \quad y' = \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

Se tendrá, llamando h a la profundidad:

$$S = \int_0^h 2\pi \cdot 2\sqrt{x}\sqrt{1 + \frac{1}{x}}\,dx = 4\pi\int_0^h \sqrt{1 + x}\,dx$$

$$= 4\pi\left[\frac{2}{3}(1 + x)^{3/2}\right]_0^h = \frac{8\pi}{3}[(1 + h)^{3/2} - 1].$$

4.° *Superficie lateral del volumen engendrado por una cicloide.* — Recordemos la ecuación de la cicloide

$$x = R(\theta - \operatorname{sen}\theta) \qquad y = R(1 - \cos\theta).$$

Se tiene

$$\frac{dx}{d\theta} = R(1 - \cos\theta) \qquad \text{y} \qquad \frac{dy}{d\theta} = R\operatorname{sen}\theta,$$

de donde

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\operatorname{sen}\theta}{1 - \cos\theta}$$

Se tendrá pues

$$S = 2\pi\int_0^{2\pi} y\,dl = 2\pi\int_0^{2\pi} R(1 - \cos\theta)\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$$

pero

$$1 + \left(\frac{dy}{dx}\right) = 1 + \frac{\operatorname{sen}^2\theta}{(1 - \cos\theta)^2} = \frac{2(1 - \cos\theta)}{(1 - \cos\theta)^2} = \frac{2}{1 - \cos\theta}$$

luego

$$\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1 - \cos\theta}},$$

lo que da

$$S = 2\pi \int_0^{2\pi} R(1 - \cos\theta) \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1 - \cos\theta}} \cdot R(1 - \cos\theta)d\theta$$

$$= 2\sqrt{2}\pi R^2 \int_{2\pi}^{0} (1 - \cos\theta)^{3/2} \cdot d\theta = 2\sqrt{2}\pi R^2 \int_0^{2\pi} \left(2\,\mathrm{sen}^2 \frac{\theta}{2}\right)^{3/2} \cdot d\theta$$

$$= 8\pi R^2 \int_0^{2\pi} \mathrm{sen}^3 \frac{\theta}{2} \cdot d\theta = 16\pi R^2 \left[\frac{1}{3}\cos^3 \frac{\theta}{2} - \cos\frac{\theta}{2}\right]_0^{2\pi}$$

$$= 16\pi R^2 \left[\frac{1}{3}(-1-1) - (-1-1)\right] = 16\pi R^2 \left(2 - \frac{2}{3}\right) = \frac{64\pi R^2}{3}.$$

5.° *Superficie exterior de un toro.*

— Conservando las mismas notaciones utilizadas al calcular el volumen del toro, se tiene

$$x = R\cos\varphi \,. \qquad y = a + R\,\mathrm{sen}\,\varphi.$$

Ahora bien, la longitud dl de un arco de curva toma aquí una forma simple

$$dl = Rd\varphi.$$

Se tendrá entonces la superficie total del toro haciendo variar φ de 0 a 2π:

$$S = \int 2\pi y\, dl = \int_0^{2\pi} 2\pi(a + R\,\mathrm{sen}\,\varphi) \cdot Rd\varphi$$

$$= 2\pi R[a\varphi - R\cos\varphi]_0^{2\pi} = 2\pi R[2\pi a - R(1-1)]$$

$$= 4\pi^2 Ra = 2\pi R \cdot 2\pi a.$$

Se ve así que S es el producto de la longitud del círculo generador, es decir $2\pi R$, multiplicada por la circunferencia descrita por el centro de gravedad, o sea $2\pi a$. Esto no es una casualidad, sino un resultado muy general: es el objeto en Mecánica de uno de los dos teoremas de GULDIN (ver más adelante el capítulo de búsqueda de los centro de gravedad).

CAPITULO XVI

BUSQUEDA DE LOS CENTROS DE GRAVEDAD

71. Preliminares. — Dada una línea, una superficie o un volumen cualquiera, se trata de buscar la posición del centro de gravedad G.

Se sabe que el centro de gravedad de un cuerpo que pesa es el punto en el que se puede suponer aplicado todo el peso del cuerpo. Es, en suma, el punto de aplicación de la resultante de todas las fuerzas de la gravedad aplicadas a cada molécula de un cuerpo. Se sabe también que la posición de este punto no cambia al variar la orientación o la inclinación del cuerpo.

Para hallar el centro de gravedad de una superficie S se asimila ésta a un peso cuyo valor es igual a S, y, si se considera esta superficie como compuesta de una infinidad de elementos dS infinitamente pequeños y todos iguales, asimilados a pesos dP, el centro de gravedad de la superficie será el punto de aplicación de la resultante de todas estas fuerzas iguales y paralelas debidas a la gravedad.

Algunos principios básicos. — Cuando hay un plano o un eje de simetría, el c.d.g. está situado en este plano o sobre este eje.

El c.d.g. de un círculo es el centro del círculo, el de un paralelogramo es el punto de cruce de las diagonales, y el de una esfera es su centro.

No podremos extendernos mucho sobre estos temas, ya que esta obra no es un curso de Mecánica. Indicaremos solamente cómo el Cálculo Integral permite la búsqueda de la posición del centro de gravedad de una línea, de una superficie o de un volumen de forma cualquiera, no regular.

Porque, en efecto, para líneas o superficies de formas simples y regulares, por ejemplo la sección de una viga de hierro en forma de doble T, se toma los momentos de las superficies con relación a una línea o a un plano y se aplica el teorema de los momentos de la Mecánica.

Hay también, en esta parte de la Mecánica que se llama Estática Gráfica, un procedimiento puramente gráfico para hallar la posición del c.d.g.

Pero nuestro fin aquí es la determinación analítica (es decir, mediante el álgebra y cálculo integral) de la posición del centro de gravedad de una línea, de una superficie o de un volumen.

72. Búsqueda de la posición del centro de gravedad de una curva. — En todo este estudio utilizaremos uno de los teoremas más importantes de la Mecánica: *el teorema de los momentos,* que enunciamos más abajo.

Antes recordemos que se llama *momento de una fuerza* con relación a un punto (o a una línea, o a un plano) al producto de la intensidad de esta fuerza por la distancia de ella al punto considerado (o a la línea, o al plano considerados).

Teorema de los momentos. — *El momento de la resultante de varias fuerzas respecto a un punto (o a una línea, o a un plano) es igual a la suma algebraica de los momentos de las componentes respecto del mismo punto (o línea, o plano).*

— Comencemos por la búsqueda del c.d.g. de una línea cualquiera (que suponemos con peso, siendo asimilada su longitud total l a su peso).

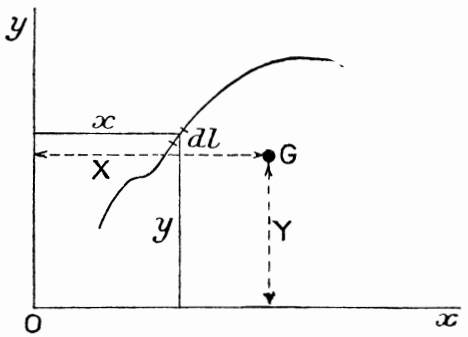


FIG. 65

Tomemos en la figura 65 un elemento dl cualquiera infinitamente pequeño, distando x e y de los ejes. Puesto que se asimila dl a su peso, el momento de dl respecto al eje de las x es $y \cdot dl$, y respecto al eje de las y es $x \cdot dl$.

La suma de los momentos de todos los elementos dl respecto al eje Ox es $\int y \cdot dl$, y respecto al eje Oy esta suma es $\int x \cdot dl$.

Pero, si llamamos X e Y a las coordenadas del centro de gravedad G donde se supone concentrado todo el peso l de la línea, el teorema de los momentos nos da:

Momentos respecto de Ox: $\int y\, dl = l \cdot Y$

Momentos respecto de Oy: $\int x\, dl = l \cdot X$.

Deduciéndose

$$Y = \frac{\int y\, dl}{l}$$

$$X = \frac{\int x\, dl}{l}$$

no pudiéndose hacer el cálculo más que en el caso de conocer la ecuación de la línea.

73. Ejemplos.

1.° *Centro de gravedad de una semicircunferencia.* Supongamos un hilo de hierro de forma de semicircunferencia. Su c.d.g. estará fuera de él, en el punto G, a la distancia Y del centro (fig. 66).

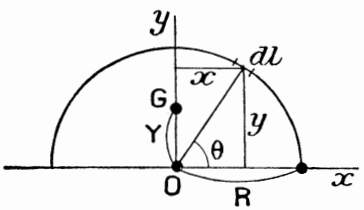


FIG. 66

—Tomemos un elemento dl cualquiera, tal que el radio forma un ángulo θ con el eje Ox. El momento de dl respecto al eje Ox es

$$dl \cdot y = dl \cdot R \operatorname{sen} \theta,$$

pero el arco dl está subtendido por un ángulo central $d\theta$, teniéndose pues:

$$dl = R \cdot d\theta$$

de donde

$$\text{Momento de } dl = R d\theta \cdot R \operatorname{sen} \theta = R^2 \operatorname{sen} \theta \, d\theta.$$

El teorema de los momentos nos da entonces (variando θ de 0 a π):

$$\text{Momento de la resultante} = \int_0^{\pi} R^2 \operatorname{sen} \theta \, d\theta$$

es decir

$$\pi R \cdot Y = \int_0^{\pi} R^2 \operatorname{sen} \theta \, d\theta$$

$$= -R^2[\cos \theta]_0^{\pi} = -R^2[-1-1] = 2R^2$$

de donde

$$Y = \frac{2R^2}{\pi R} = \frac{2R}{\pi}.$$

Hemos realizado el cálculo completo, sin aplicar la fórmula, a fin de que el lector comprenda bien el mecanismo de este cálculo.

En realidad, si se quisiera aplicar directamente las dos fórmulas que dan X e Y, sería preciso reemplazar dl por la fórmula conocida (ver Tomo II, párrafo 83) que da la diferencial de un arco de curva

$$dl = \sqrt{dx^2 + dy^2} \quad \text{o bien} \quad \sqrt{1 + y'^2} \cdot dx,$$

pero

$$x^2 + y^2 = R^2,$$

y se tiene

$$y_x' = -\frac{f_x'}{f_y'} = -\frac{x}{y}$$

luego

$$dl = \sqrt{1 + \frac{x^2}{y^2}}\, dx = \frac{R}{y}\, dx = \frac{R\, dx}{\sqrt{R^2 - x^2}},$$

y finalmente

$$Y = \frac{\int y \, dl}{l} = \frac{\int_{-R}^{+R} R\, dx}{\pi R} = \frac{2R \cdot R}{\pi R} = \frac{2R}{\pi}$$

2.° *Centro de gravedad de un arco de asteroide* (fig. 67), que se llama también *hipocicloide*. Su ecuación es

$$x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}.$$

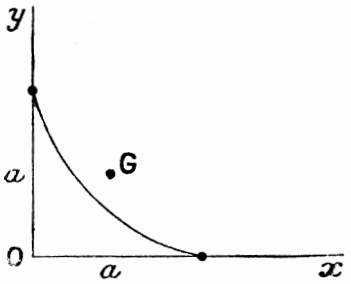


FIG. 67

—Se tiene

$$y_x' = -\frac{f_x'}{f_y'} = -\frac{x^{-1/3}}{y^{-1/3}} = -\left(\frac{y}{x}\right)^{1/3}$$

y

$$y'^2 = \left(\frac{y}{x}\right)^{2/3}.$$

Calculemos el denominador de X y de Y:

$$l = \int_0^a \sqrt{1 + y'^2}\, dx = \int_0^a \sqrt{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^{2/3}}\, dx$$

$$= \int_0^a a^{1/3} \cdot x^{-1/3}\, dx = a^{1/3} \cdot \frac{3}{2}\left[x^{2/3}\right]_0^a = \frac{3}{2} a^{1/3} \cdot a^{2/3} = \frac{3}{2} a.$$

Por otra parte, el numerador de X es (utilizando los cálculos superiores):

$$\int_0^a x\, dl = a^{1/3} \int_0^a x \cdot x^{-1/3}\, dx = a^{1/3} \cdot \frac{3}{5}\left[x^{5/3}\right]_0^a = \frac{3}{5} a^2$$

Y, por razón de simetría a los dos ejes, se tendrá

$$X = Y = \frac{\frac{3}{5} a^2}{\frac{3}{2} a} = \frac{2}{5} a.$$

3.° *Centro de gravedad del arco de la curva*

$$\rho = a(1 + \cos\theta)$$

donde θ *varía de* 0 *a* π.

—Esta ecuación es la de una *cardioide* (fig. 68), cuya longitud total se calculó anteriormente ($8a$), cuando θ variaba de 0 a 2π. Luego aquí será $l = 4a$.

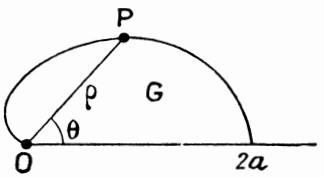


FIG. 68

Sea G el c.d.g. de la curva, X su abscisa e Y su ordenada.

Apliquemos directamente el teorema de los momentos.

Respecto al eje vertical, el momento total de la línea, supuesta pesada, es $4a \cdot X$; se tiene pues

$$4aX = \int_0^{\pi} x\, dl.$$

Al calcular la longitud de la curva, se halló para su mitad,

$$l = 4a \cdot \operatorname{sen} \frac{\theta}{2},$$

Por otra parte, la abscisa de un punto P cualquiera de la curva, tomando el polo O como origen de coordenadas, es

$$x = \rho \cdot \cos\theta = a(1 + \cos\theta)\cos\theta.$$

Se tendrá pues

$$4aX = \int_0^{\pi} a(1 + \cos\theta)\cos\theta \cdot 4a\cos\frac{\theta}{2} \cdot \frac{d\theta}{2}$$

$$= 2a^2 \int_0^{\pi} (1 + \cos\theta)\cos\theta \cdot \cos\frac{\theta}{2}\, d\theta.$$

Expresemos todo en función del ángulo $\frac{\theta}{2}$: se sabe que

$$\cos^2\theta = \frac{1 + \cos 2\theta}{2}$$

de donde

$$\cos\theta = 2\cos^2\frac{\theta}{2} - 1 = 2\left(1 - \operatorname{sen}^2\frac{\theta}{2}\right) - 1 = 1 - 2\operatorname{sen}^2\frac{\theta}{2}.$$

Por otra parte

$$1 + \cos\theta = 2\cos^2\frac{\theta}{2} = 2\left(1 - \operatorname{sen}^2\frac{\theta}{2}\right).$$

Luego tendremos

$$4aX = 2a^2\int_0^{\pi} 2\left(1 - \operatorname{sen}^2\frac{\theta}{2}\right)\left(1 - 2\operatorname{sen}^2\frac{\theta}{2}\right)\cos\frac{\theta}{2}\,d\theta$$

$$= 4a^2\int_0^{\pi}\left(1 - 3\operatorname{sen}^2\frac{\theta}{2} + 2\operatorname{sen}^4\frac{\theta}{2}\right)\cos\frac{\theta}{2}\,d\theta$$

$$= 4a^2\left[\int_0^{\pi}\cos\frac{\theta}{2}\,d\theta - 3\int_0^{\pi}\operatorname{sen}^2\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\,d\theta + 2\int_0^{\pi}\operatorname{sen}^4\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\,d\theta\right]$$

$$= 8a^2\left[\operatorname{sen}\frac{\theta}{2} - \operatorname{sen}^3\frac{\theta}{2} + \frac{2}{5}\operatorname{sen}^5\frac{\theta}{2}\right]_0^{\pi} = \frac{16a^2}{5}$$

de donde

$$X = \frac{16a^2}{5\cdot 4a} = \frac{4}{5}a.$$

Respecto al eje horizontal, el momento de la línea, supuesta concentrada en G, es $4a \cdot Y$. Se tendrá, pues, escribiendo que el momento de la resultante es igual a la suma de los momentos de las componentes $\int y \cdot dl$:

$$4aY = \int y\,dl = 2a^2\int_0^{\pi}(1 + \cos\theta)\operatorname{sen}\theta\cdot\cos\frac{\theta}{2}\,d\theta$$

$$= 8a^2\int_0^{\pi}\cos^4\frac{\theta}{2}\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}\,d\theta = \frac{16a^2}{5},$$

de donde

$$Y = \frac{4a}{5} = X$$

4.° *Centro de gravedad de una catenaria* (fig. 49).

Hemos visto (cálculo de las longitudes de curvas) que la ecuación de la catenaria se puede también escribir:

$$y = a\,\mathrm{ch}\frac{x}{a}$$

La longitud de un elemento dl es

$$dl + \sqrt{1 + y'^2}\,dx = \sqrt{1 + \mathrm{sh}^2\frac{x}{a}}\,dx = ch\frac{x}{a}\,dx,$$

y la longitud desde $x = 0$ hasta un cierto valor x será

$$l_1 = \int_0^x \operatorname{ch} \frac{x}{a}\, dx = a \operatorname{sh} \frac{x}{a}.$$

La longitud total desde $-x$ hasta $+x$ será el doble, o sea $l = 2l_1$.

Apliquemos el teorema de los momentos respecto al eje Ox, llamando OG = Y a la ordenada del c.d.g.

$$l \cdot \mathrm{OG} = \int_{-x}^{+x} y\, dl = 2 \int_0^x y\, dl$$

y

$$\mathrm{OG} = \mathrm{Y} = \frac{2 \int_0^x y\, dl}{l} = \frac{2 \int_0^x a \operatorname{ch} \frac{x}{a} \cdot \operatorname{ch} \frac{x}{a}\, dx}{2a \operatorname{sh} \frac{x}{a}}$$

$$= \frac{\int_0^x \operatorname{ch}^2 \frac{x}{a}\, dx}{\operatorname{sh} \frac{x}{a}} = \frac{x + \frac{a}{2} \operatorname{sh} \frac{2x}{a}}{2 \operatorname{sh} \frac{x}{a}}.$$

74. Centros de gravedad de las superficies. — Sea $y = f(x)$ la ecuación del perfil de la superficie de la figura 69. Tomemos un punto P cualquiera sobre esta curva, que tenga abscisa x y ordenada y.

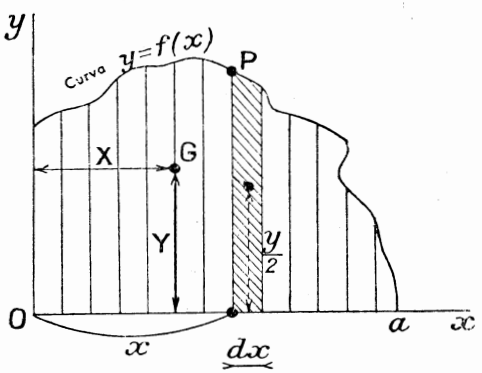


FIG. 69

Demos a x un pequeño incremento dx y calculemos el momento respecto a los dos ejes de la pequeña rebanada rayada de espesor dx y de altura y, asimilando la superficie a un peso:

Su momento respecto a Oy es $dS \cdot x = y\,dx \cdot x$

y su momento respecto a Ox es $dS \cdot \frac{y}{2} = y\,dx \cdot \frac{y}{2}$.

En efecto, se considera el peso de esta pequeña superficie dS como aplicado en el centro de gravedad de esta rebanada (asimilada a un rectángulo), *es decir en el centro de su altura,* o sea en $\frac{y}{2}$.

— El teorema de los momentos nos da, llamando S a la superficie total, que, por otra parte, es igual a $\int_0^a y\,dx$ supuesta concentrada en el centro de gravedad G:

respecto a Ox

$$\left.\begin{array}{l} S \cdot Y = \int_0^a \frac{y^2}{2}\,dx \\ \text{respecto a } Oy \\ S \cdot Y = \int_0^a xy\,dx \end{array}\right\} \quad (\text{con } S = \int_0^a y\,dx)$$

de donde se deduce

$$\boxed{X = \frac{\int_0^a xy\,dx}{\int_0^a y\,dx}, \qquad Y = \frac{\int_0^a \frac{y^2}{2}\,dx}{\int_0^a y\,dx}}$$

reemplazando y por la ecuación de la curva $y = f(x)$.

— Veremos en el Tomo IV (párrafo 61), cómo, en ciertos casos, la búsqueda del c.d.g. se simplifica por medio de las integrales dobles.

75. Ejemplos.

1.° *Centro de gravedad de la superficie de una parábola* (fig. 70). — Sea

$$y^2 = 4x.$$

Se tiene

$$y = 2\sqrt{x}$$

y

$$X = \frac{\int 2\sqrt{x} \cdot x\,dx}{\int y\,dx} \qquad \text{(variando } x \text{ de 0 a } h\text{)}$$

$$= \frac{2\int_0^h x^{3/2}\,dx}{2\int_0^h x^{1/2}\,dx} = \frac{\frac{2}{5}\left[x^{5/2}\right]_0^h}{\frac{2}{3}\left[x^{3/2}\right]_0^h} = \frac{3}{5}\frac{h^{5/2}}{h^{3/2}} = \frac{3}{5}h$$

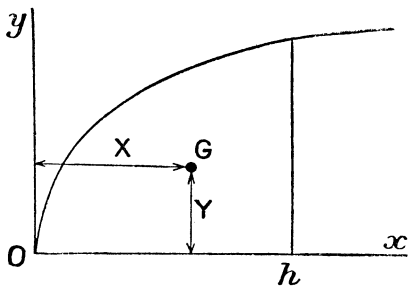


FIG. 70

— Igualmente

$$Y = \frac{\frac{1}{2}\int_0^h 4x\,dx}{\int_0^h 2\sqrt{x}\,dx} = \frac{\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^h}{\frac{2}{3}\left[x^{3/2}\right]_0^h} = \frac{3h^2}{4h^{3/2}} = \frac{3}{4}\sqrt{h}$$

pero, para

$$x = h, \qquad y = 2\sqrt{h} = y_m,$$

de donde

$$Y = \frac{3}{8}2\sqrt{h} = \frac{3}{8}y_m.$$

2.° *Centro de gravedad de la superficie de un semicírculo* (fig. 71).

— Sea $x^2 + y^2 = R^2$ la ecuación del círculo. Se tiene

$$y = \sqrt{R^2 - x^2}.$$

La abscisa X es nula, ya que el c.d.g. está evidentemente sobre el eje Oy. Calculemos, pues, la ordenada Y, variando x de — R a + R. Se puede duplicar e integrar de 0 a R

$$Y = \frac{2\int_0^R \frac{1}{2}(R^2 - x^2)dx}{\text{Superficie total}} = \frac{\int_0^R R^2 dx - \int_0^R x^2\,dx}{\frac{\pi R^2}{2}} = \frac{R^3 - \frac{R^3}{3}}{\frac{\pi R^2}{2}} = \frac{4R}{3\pi}.$$

3.° *Calcular la posición del centro de gravedad de la superficie comprendida entre la elipse*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

y la recta que une el extremo del eje mayor con el del menor (fig. 72).

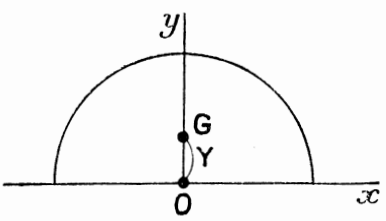


FIG. 71

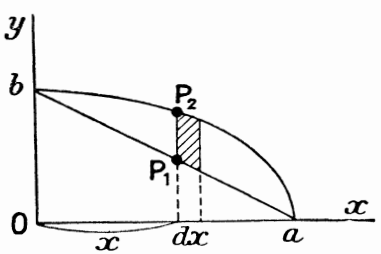


FIG. 72

— Des compongamos esta superficie en rebanadas de espesor dx. Sea y^2 la ordenada de un punto P_2 de la elipse, e y_1 la del punto correspondiente P_1 de la recta, que tiene la misma abscisa. La superficie dS rayada es

$$dS = (y_2 - y_1)dx$$

y su c.d.g. está en el punto medio del intervalo $y_2 - y_1$, ya que se asimila dS a un pequeño rectángulo.

Esta superficie S, comprendida entre la elipse y la recta, es la di-

ferencia entre la superficie del cuarto de elipse $\frac{\pi ab}{4}$ y la del triángulo rectángulo:

$$S = \frac{\pi ab}{4} - \frac{ab}{2} = \frac{ab}{2}\left(\frac{\pi}{2} - 1\right).$$

Por otra parte, según la ecuación de la elipse, se tiene

$$y_2 = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$$

y, la ecuación de la recta es (ver el Tomo VI: *Geometría Analítica*):

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1,$$

se deduce

$$y_1 = \frac{b}{a}(a - x).$$

Teniéndose por tanto

$$X = \frac{\int_0^a x(y_2 - y_1)dx}{S}$$

e

$$Y = \frac{\frac{1}{2}\int_0^a (y_2^2 - y_1^2)dx}{S}$$

es decir

$$X = \frac{\int_0^a x\left[\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2} - \frac{b}{a}(a - x)\right]dx}{S}$$

e

$$Y = \frac{\frac{1}{2}\int_0^a \left[\frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2) - \frac{b^2}{a^2}(a - x)^2\right]dx}{S}$$

Hechos todos los cálculos, se halla

$$\left|\begin{array}{l} X = 0{,}58a \\ Y = 0{,}58b. \end{array}\right.$$

4.° *Centro de gravedad de la superficie de una cicloide.*

— Ya hemos establecido la ecuación de la cicloide en forma paramétrica (ver fig. 28 b):

$$x = R(\varphi - \operatorname{sen}\varphi) \qquad y = R(1 - \cos\varphi)$$

y también hemos calculado la superficie comprendida entre la cicloide y el eje de las x.

$$S = 3\pi R^2.$$

Si el círculo generador da una vuelta, un punto de este círculo engendra una cicloide cuya longitud, según el eje de las x, es $2\pi R$. Luego, por razón de simetría, el c.d.g. estará sobre el eje medio de la curva, es decir, que su abscisa será πR.

Calculemos su ordenada

$$Y = \frac{\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} y^2\,dx}{S} = \frac{1}{2}\,\frac{\int_0^{2\pi} R^3(1-\cos\varphi)^2(1-\cos\varphi)d\varphi}{3\pi R^2}$$

$$= \frac{R}{6\pi}\int_0^{2\pi}(1-\cos\varphi)^3 d\varphi = \frac{R}{6\pi}\int_0^{2\pi}(1 - 3\cos\varphi + 3\cos^2\varphi - \cos^3\varphi)d\varphi$$

$$= \frac{R}{6\pi}\int_0^{2\pi}\left[1 - 3\cos\varphi + 3\left(\frac{1+\cos 2\varphi}{2}\right) - \left(\frac{\cos 3\varphi + 3\cos\varphi}{4}\right)\right]d\varphi$$

$$= \frac{R}{6\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{10 - 15\cos\varphi + 6\cos 2\varphi - \cos 3\varphi}{4}\right)d\varphi.$$

Pero, sabemos que la integral de un coseno entre 0 y 2π es siempre nula, *cualquiera que sea el valor del ángulo*, quedando pues

$$Y = \frac{R}{6\pi}\int_0^{2\pi}\frac{10\,d\varphi}{4} = \frac{5R}{6}.$$

76. Centros de gravedad de los volúmenes. — Para los volúmenes de revolución, basta con tomar una pequeña rebanada de espesor dx o dy, calcular su volumen y aplicar el teorema de los momentos respecto a un eje *perpendicular* al eje de revolución:

Mmto. de la resultante = $\sum$ de los momtos. de las componentes,

donde el momento de la resultante es igual al producto del volumen total por la abscisa (o la ordenada) del centro de gravedad.

Con un sencillo ejemplo quedará más claro.

Ejemplo:

Centro de gravedad de un semielipsoide de revolución (fig. 73).

—La ecuación de la curva es

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

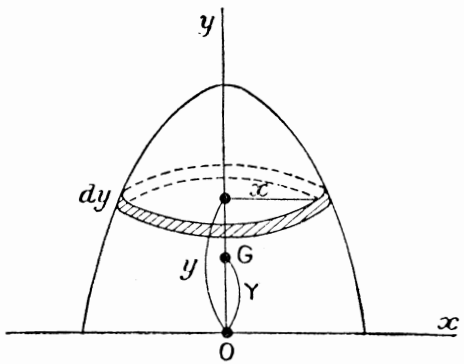


FIG. 73

Tomemos una rebanada de espesor dy, cuya ordenada es y, su radio x y el volumen

$$dV = \pi x^2\, dy,$$

y su momento respecto al eje Ox es $y \cdot \pi x^2\, dy$.

El teorema de los momentos, respecto al eje Ox, da:

$$\text{Volumen total} \cdot \text{OG} = \int_0^b \pi x^2 y\, dy$$

de donde

$$\text{OG} = \text{Y} = \frac{\displaystyle\int_0^b \pi x^2 y\, dy}{\displaystyle\int_0^b \pi x^2\, dy}$$

pero

$$x^2 = a^2\left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right),$$

y llevándolo a Y:

$$Y = \frac{\int_0^b a^2\left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right) y\, dy}{\int_0^b a^2\left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right) dy} = \frac{b^2}{2}\,\frac{\int_0^b \left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right)\left(\frac{2y\, dy}{b^2}\right)}{\int_0^b \left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right) dy}$$

integrales sencillas de calcular, que finalmente dan

$$Y = \frac{3}{8}\, b.$$

En realidad, deberíamos haber multiplicado los volúmenes por la densidad δ, pero esta cantidad desaparece en el curso del cálculo.

77. Teoremas de Guldin. — Hay otra manera, a menudo más cómoda, de calcular la posición del centro de gravedad de una línea o de una superficie cualquiera: es la aplicación de uno de los dos teoremas de GULDIN.

Como la demostración de estos dos teoremas emplea el cálculo integral, vamos a estudiarlos como aplicación del cálculo integral. Haremos a continuación algunos ejemplos de aplicaciones, sin insistir más.

Los dos teoremas de GULDIN dan una relación entre el volumen de un sólido de revolución (o entre la superficie exterior de un sólido de revolución) y la circunferencia descrita por el c.d.g. de la superficie generatriz (o de la línea generatriz).

Se podrá así, conociendo el volumen del cuerpo o su superficie lateral, deducir la posición del centro de gravedad, o inversamente.

Supongamos, pues, una curva plana cualquiera $y = f(x)$ que gira alrededor del eje Ox dando una vuelta completa.

Primer teorema. *La superficie exterior de un volumen de revolución es igual a la longitud de la línea generatriz que ha engendrado el volumen multiplicada por la circunferencia descrita por el c.d.g. de la línea, suponiendo que la línea no corta al eje.*

Para demostrarlo basta con aplicar el teorema de los momentos de la Mecánica: el momento de la resultante de varias fuerzas, res-

pecto de un eje, es igual a la suma algebraica de los momentos de las componentes respecto al mismo eje.

Se sigue asimilando las líneas a pesos cuyo valor es igual a la longitud de las líneas.

Descompongamos la curva $y = f(x)$, tomada entre los límites $x = a$ y $x = b$ (fig. 74) en n partes iguales infinitamente pequeñas dl. Consideremos una de ellas, que tomaremos como un segmento de recta. Llamemos y a la ordenada del punto medio de dl, es decir a la ordenada del c.d.g. de dl.

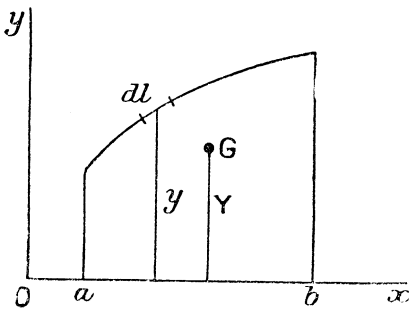


FIG. 74

Al girar alrededor del eje Ox, el elemento dl engendra la superficie lateral dS de un tronco de cono (fig. 75).

$$dS = 2\pi y \cdot dl$$

y la superficie total engendrada será

$$S = \int_a^b 2\pi y \, dl = 2\pi \int_a^b y \, dl.$$

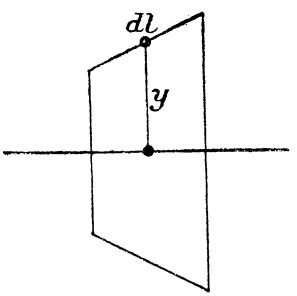


FIG. 75

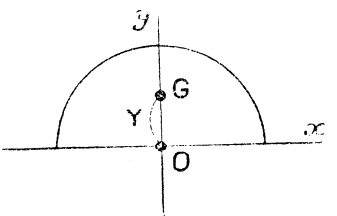


FIG. 76

Pero, $y \cdot dl$ es el momento del elemento dl respecto del eje, y la suma de todos estos momentos es igual al momento de la resultante. Si llamamos Y a la distancia al eje del c.d.g. G *de la línea*, se tendrá

$$\int y\, dl = \mathrm{Y} \cdot l_{\text{total}}$$

de donde

$$\mathrm{S} = 2\pi \mathrm{Y} l$$

ahora bien, 2πY es la circunferencia descrita por el c.d.g. y l es la longitud de la curva, luego queda demostrado el teorema.

— **Ejemplos:**

1.° *Centro de gravedad de una semicircunferencia* (fig. 76).

— Al girar alrededor del eje Ox engendra la superficie de una esfera $4\pi R^2$; se tendrá pues

$$2\pi \mathrm{Y} \cdot \pi \mathrm{R} = 4\pi \mathrm{R}^2$$

de donde

$$\mathrm{Y} = \frac{2\mathrm{R}}{\pi}.$$

2.° *Calcular la superficie lateral exterior de un toro.*

— El primer teorema permite, conociendo la posición del c.d.g. de una curva, deducir la superficie exterior del volumen de revolución engendrado.

Es éste el caso del toro engendrado por una circunferencia de radio r que gira alrededor de un eje situado en su plano, siendo la distancia de su centro al eje, es decir R, mayor que r (fig. 77).

La longitud de la curva generatriz es $2\pi r$, por lo que el teorema nos da

$$\mathrm{S} = 2\pi \cdot 2\pi \mathrm{R} = 4\pi^2 \mathrm{R} r.$$

3.° *Centro de gravedad de una cicloide.*

Se trata del c.d.g. de la curva, y no del de la superficie.

— En el párrafo 70 se ha calculado la superficie exterior del volumen engendrado por la cicloide al girar alrededor del eje Ox, que vale

$$\mathrm{S} = \frac{64\pi \mathrm{R}^2}{3}$$

y si Y es la ordenada del c.d.g., se tendrá

$$\mathrm{S} = 2\pi \mathrm{Y} \cdot l \qquad (\text{con } l = 8\mathrm{R})$$

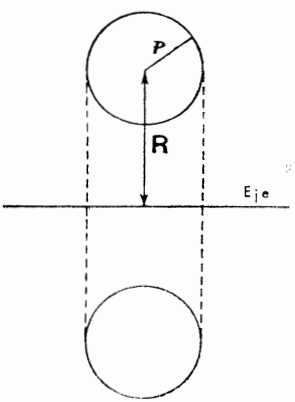


FIG. 77

o bien

$$\frac{64\pi R^2}{3} = 2\pi Y \cdot 8R$$

de donde

$$Y = \frac{4R}{3}.$$

2.° **Teorema.** — *El volumen engendrado por una superficie plana que gira alrededor de un eje que no la corta, es igual al producto de la superficie S por la circunferencia descrita por el centro de gravedad de esta superficie.*

— Descompongamos esta superficie S en pequeños cuadrados de lado dx, y consideremos uno de ellos. Al girar alrededor de Ox engendra un anillo cuyo volumen es (fig. 78):

$$dV = \pi y_2^2 dx - \pi y_1^2 dx = \pi dx(y_2^2 - y_1^2) = \pi dx(y_2 + y_1)(y_2 - y_1),$$

pero $y_2 - y_1$ es igual a dx, e $y_1 + y_2$ es el doble de la ordenada y del c.d.g. de este cuadrado, representado en la figura por un punto.

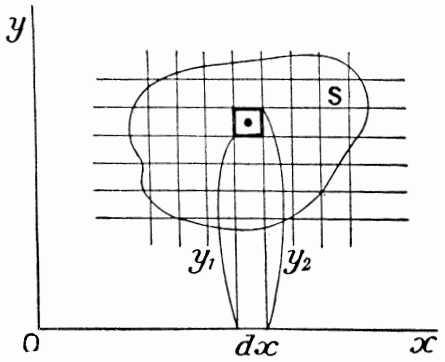


FIG. 78

Se tiene

$$dV = \pi dx \cdot 2y \cdot dx = 2\pi y\, dx^2$$

y el volumen total será

$$V = \int 2\pi y \cdot dx^2 = 2\pi \int y \cdot dx^2,$$

pero $y \cdot dx^2$ es el momento de la superficie del pequeño cuadrado res-

pecto al eje Ox, y la suma de todos estos momentos será igual al momento de la resultante.

$$\int y \cdot dx^2 = S \cdot Y,$$

donde Y es la ordenada del c.d.g. (fig. 79).

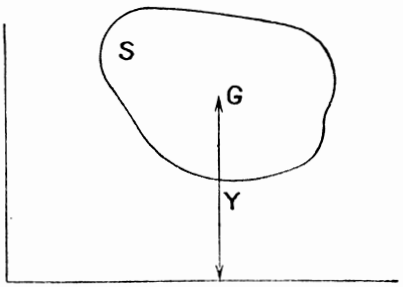


FIG. 79

Se tendrá finalmente

$$V = 2\pi SY = 2\pi Y \cdot S$$

y como $2\pi Y$ es la circunferencia descrita por el c.d.g. de la superficie S, el teorema está demostrado.

78. Ejemplos:

1.° *Volumen del toro.*

—La superficie que engendra el toro es un círculo de área πr^2. Como su c.d.g. está en el centro, a la distancia R del eje, el volumen engendrado será un toro, tal que

$$V = \pi r^2 \cdot 2\pi R = 2\pi^2 R r^2.$$

2.° *Centro de gravedad de la superficie de un semicírculo* (fig. 80).

Al girar alrededor de Ox, este semicírculo engendra una esfera cuyo volumen es $\frac{4}{3}\pi R^3$. Se tendrá, pues, si OG es la ordenada del c.d.g. del semicírculo

$$\frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{\pi R^2}{2} \cdot 2\pi OG$$

de donde

$$OG = \frac{4}{3}\frac{R}{\pi}.$$

3.° *Volumen del paraboloide* (fig. 1).

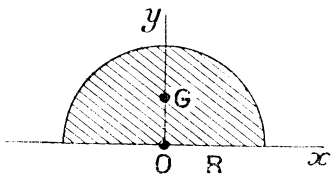


FIG. 80

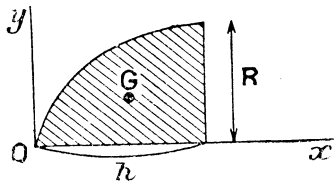


FIG. 81

— Sea la parábola $y^2 = 2px$. Al girar alrededor de Ox, engendra el volumen de un paraboloide, de profundidad h y de radio R en la base.

En el § 75 se halló que la ordenada del c.d.g. de la superficie de la parábola era

$$Y = \frac{3}{8} y_{max} = \frac{3}{8} R.$$

También se ha calculado, en el capítulo del cálculo de las superficies de curvas, la superficie de la parábola, que vale

$$S = \frac{2}{3} hR.$$

Se tendrá, pues, para el volumen

$$V = S \cdot 2\pi Y = \frac{2}{2} hR2\pi \cdot \frac{3}{8} R = \frac{1}{2} \pi hR^2.$$

El volumen del cilindro de la misma altura h y mismo radio R era $\pi R^2 h$, luego se ve que el volumen del paraboloide es la mitad del volumen del cilindro.

4.° *Centro de gravedad de la superficie de la cicloide.*

— En el párrafo 50 se ha calculado la superficie de la cicloide

$$S = 3\pi R^2$$

así como el volumen que engendra al girar alrededor del eje de las x

$$V = 5\pi^2 R^3.$$

La ordenada Y del c.d.g. está entonces dada por el teorema de GULDIN

$$V = S \cdot 2\pi Y$$
$$5\pi^2 R^3 = 3\pi R^2 \cdot 2\pi Y$$

de donde

$$Y = \frac{5}{6} R,$$

valor que ya habíamos hallado directamente.

NOTA IMPORTANTE. — Veremos en el Tomo IV, tras el estudio de las integrales dobles, cómo estas últimas nos permiten también buscar la posición del centro de gravedad.

Nota final. — En el Tomo IV se darán un gran número de aplicaciones de las integrales a la mecánica, electricidad, vibraciones, radio, etcétera. También en el Tomo V se darán treinta y cinco aplicaciones de las ecuaciones diferenciales.

LISTA RECAPITULATIVA DE LAS

FORMULAS DEL TOMO III

Integrales fundamentales:

No las repetimos aquí, puesto que la tabla completa de estas integrales está dada en el *capítulo* II.

Algunas integrales útiles:

$$\int \frac{dx}{\operatorname{sen} x} = \operatorname{Log} \operatorname{tg} \frac{x}{2} + c$$

$$\int \frac{dx}{\cos x} = -\operatorname{Log} \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right) + c$$

o bien

$$= \operatorname{Log} \left(\operatorname{tg} x + \frac{1}{\cos x}\right) + c$$

Se tiene también:

$$\int_a^b y\,dx = \int_a^c y\,dx + \int_c^b y\,dx$$

donde c es una abscisa comprendida entre a y b.

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{\pi}{2}.$$

Integración por partes:

$$\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du + c$$

$$\int x \cdot \cos ax\,dx = \frac{1}{a^2} \cos ax + \frac{x}{a} \operatorname{sen} ax + c$$

$$\int x \cdot \operatorname{sen} ax\,dx = \frac{1}{a^2} \operatorname{sen} ax - \frac{x}{a} \cos ax + c$$

$$\int e^{ax} \cdot \cos bx\, dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2}(a \cos bx + b \operatorname{sen} bx) + c$$

$$\int e^{ax} \cdot \operatorname{sen} bx\, dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2}(a \operatorname{sen} bx - b \cos bx) + c$$

$$\int \sqrt{x^2 - a^2}\, dx = \frac{x\sqrt{x^2 - a^2}}{2} - \frac{a^2}{2} \operatorname{Log}\left(\frac{x + \sqrt{x^2 - a^2}}{a}\right) + c$$

$$\int \frac{dx}{K^2 + x^2} = \frac{1}{K} \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{K} + c$$

$$\int \frac{dx}{K^2 - x^2} = \frac{1}{2K} \operatorname{Log} \frac{K + x}{K - x} + c.$$

Integración de: $\displaystyle\int \frac{dx}{ax^2 + bx + c}$

Primer caso:

$b^2 - 4ac = 0$, tenemos $\displaystyle I = -\frac{1}{a\left(x + \frac{b}{2a}\right)} + C$

Segundo caso:

$b^2 - 4ac < 0$, tenemos $\displaystyle I = \frac{1}{aK} \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{x + \frac{b}{2a}}{K}\right) + C.$

Tercer caso:

$b^2 - 4ac > 0$, tenemos $\displaystyle I = -\frac{1}{2aK} \cdot \operatorname{Log} \frac{K + \left(x + \frac{b}{2a}\right)}{K - \left(x + \frac{b}{2a}\right)} + C.$

Por otra parte, se tiene que:

$$\int \frac{(px + r)dx}{ax^2 + bx + c} = \frac{p}{2a} \operatorname{Log}(ax^2 + bx + c) + \left(r - \frac{pb}{2a}\right) \int \frac{dx}{ax^2 + bx + c} + C.$$

Integración de: $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}$

Primer caso:

$a < 0$, tenemos $\displaystyle I = \frac{1}{\sqrt{|a|}} \operatorname{arc\,sen}\left(\frac{x + \frac{b}{2a}}{K}\right) + C$

con

$$K^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

Segundo caso:

$$a > 0, \qquad \text{tenemos} \qquad I = \frac{1}{\sqrt{|a|}} \operatorname{Log}\left(u + \sqrt{u^2 \pm K^2}\right) + C$$

con

$$u = x + \frac{b}{2a} \qquad \text{y} \qquad \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} = \pm K^2.$$

Por otra parte, se tiene:

$$\int \frac{(px + r)dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} = \frac{p}{2a} \int \frac{du}{\sqrt{u}} + \left(r - \frac{pb}{2a}\right) \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} + C$$

con

$$u = ax^2 + bx + c.$$

Integración de: $\displaystyle\int \sqrt{ax^2 + bx + c}\, dx$

Primer caso:

$$\int \sqrt{K^2 - u^2}\, du = \frac{K^2}{2} \operatorname{arc\,sen} \frac{u}{K} + \frac{u\sqrt{K^2 - u^2}}{2} + C$$

Segundo caso:

$$\int \sqrt{u^2 \pm K^2}\, du = \frac{1}{2} \left[u\sqrt{u^2 \pm K^2} \pm K^2 \operatorname{Log}\left(u + \sqrt{u^2 \pm K^2}\right)\right] + C.$$

Por otra parte, se tiene:

$$\int \frac{du}{\sqrt{u^2 + K^2}} = \operatorname{Log}\left(u + \sqrt{u^2 + K^2}\right) + C$$

$$\int \frac{du}{\sqrt{u^2 - K^2}} = \operatorname{Log}\left(u + \sqrt{u^2 - K^2}\right) + C.$$

Integración de: $\displaystyle\int \sqrt{ax + b}\, dx$

haciendo $u^2 = ax + b$, se tiene $I = \dfrac{2}{3} \dfrac{u^3}{a} + c.$

Fracciones racionales:

Las dos fórmulas generales son las siguientes:

$$\int \frac{(Mx + N)dx}{(x - a)(x - b)} = \frac{Ma + N}{a - b}\int \frac{dx}{x - a} + \frac{Mb + N}{b - a}\int \frac{dx}{x - b} + c$$

$$\int \frac{(ax + b)dx}{(x - p)^n} = \int \frac{A dx}{(x - p)^n} + \int \frac{B dx}{(x - p)^{n-1}} + \ldots + \int \frac{M dx}{x - p} + c$$

donde podemos anular M o N, a o b.

Integrales trigonométricas:

$$\int \frac{dx}{sen\, x} = \text{Log tg}\frac{x}{2} + c$$

$$\int \frac{dx}{\cos x} = \text{Log tg}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{x}{2}\right) + c$$

$$= \text{Log}\frac{1 + \text{tg}\frac{x}{2}}{1 - \text{tg}\frac{x}{2}} + c$$

$$\int \frac{dx}{a \operatorname{sen} x + b \cos x} = \frac{1}{M}\text{Log tg}\left(\frac{x}{2} - \frac{\varphi}{2}\right) + c$$

con

$$M = \sqrt{a^2 + b^2} \qquad \text{y} \qquad \text{tg}\,\varphi = -\frac{b}{a}$$

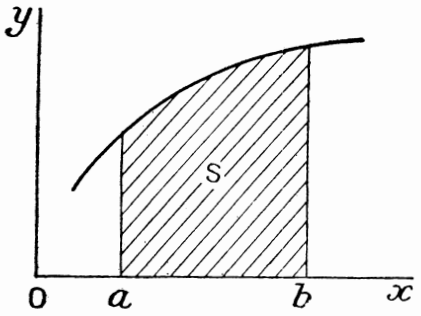
$$\int \operatorname{sen}^2 x\, dx = \frac{x}{2} - \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2x + c$$

$$\int \cos^2 x\, dx = \frac{x}{2} + \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2x + c$$

$$\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^2 x} = -\frac{1}{\text{tg}\, x} + c.$$

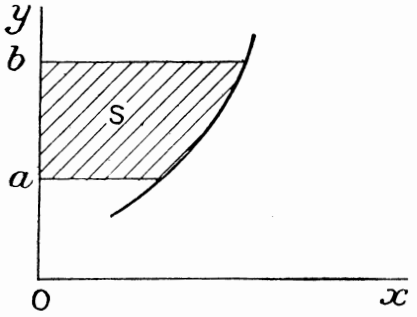
APLICACIONES DE LAS INTEGRALES

Superficie comprendida entre una curva y el eje de las x:



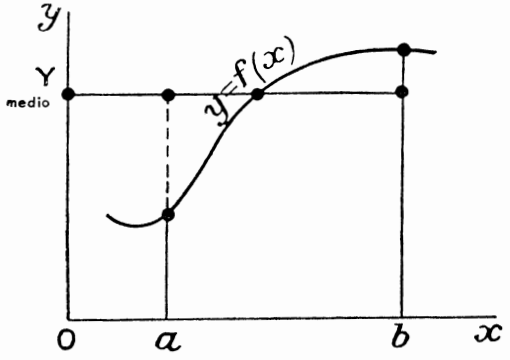
$$S = \int_a^b y \cdot dx.$$

Superficie comprendida entre una curva y el eje de las y:



$$S = \int_a^b x \cdot dy.$$

Valor medio de una función:



$$Y_{media} = \frac{1}{b-a} \int_a^b y \cdot dx$$

Superficie de una curva en coordenadas polares:

$$S = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{1}{2} \rho^2 \, d\theta.$$

Algunas superficies:

Superficie de la elipse:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$S = \pi a b.$$

Superficie de un bucle de la lemniscata: $\rho^2 = a^2 \cos 2\theta$

$$S = \frac{a^2}{2}.$$

Superficie de la cardioide: $\rho = a(1 + \cos \theta)$

$$S = \frac{3\pi a^2}{2}.$$

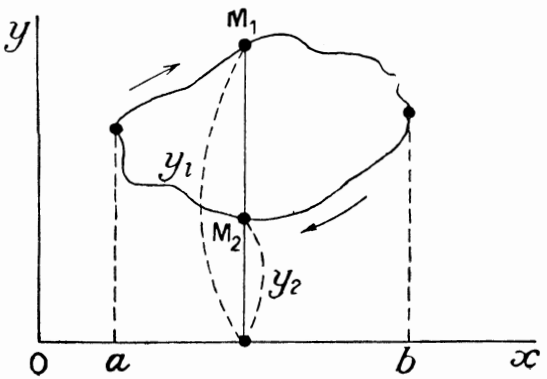
Superficie del bucle de Descartes: $x^2 + y^3 = 3axy$

$$S = \frac{3}{2} a^2.$$

Superficie de la cicloide:

$$x = R(\theta - \operatorname{sen} \theta)$$
$$y = R(1 - \cos \theta)$$
$$S = 3\pi R^2.$$

Superficie de una curva cerrada.



$$S = \int_a^b y_1 \, dx + \int_b^a y_2 \, dx,$$

y haciendo

$$x = f(\theta) \qquad y = \varphi(\theta),$$

se tiene

$$S = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \varphi(\theta) \cdot f'(\theta) \cdot d\theta.$$

Líneas trigonométricas hiperbólicas.

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad \operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$\operatorname{th} x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$$

$$\operatorname{sh} x = \frac{x}{1!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots$$

$$\operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$$

$$\operatorname{ch}' x = \operatorname{sh} x \qquad \operatorname{sh}' x = \operatorname{ch} x \qquad \operatorname{th}' x = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$$

$$\operatorname{ch} x = \frac{1}{\sqrt{1 - \operatorname{th}^2 x}} \qquad \operatorname{sh} x = \frac{\operatorname{th} x}{\sqrt{1 - \operatorname{th}^2 x}}$$

$$\left|\begin{array}{l} \operatorname{ch}(a+b) = \operatorname{ch} a \cdot \operatorname{ch} b + \operatorname{sh} a \cdot \operatorname{sh} b \\ \operatorname{sh}(a+b) = \operatorname{sh} a \cdot \operatorname{ch} b + \operatorname{ch} a \cdot \operatorname{sh} b \end{array}\right.$$

$$\left|\begin{array}{l} \operatorname{ch} 2a = \operatorname{ch}^2 a + \operatorname{sh}^2 a \\ \operatorname{sh} 2a = 2 \operatorname{sh} a \cdot \operatorname{ch} a \end{array}\right.$$

$$\left|\begin{array}{l} \operatorname{ch}^2 a = \dfrac{\operatorname{ch} 2a + 1}{2} \\ \operatorname{sh}^2 a = \dfrac{\operatorname{ch} 2a - 1}{2} \end{array}\right.$$

$$\left|\begin{array}{l} \operatorname{ch} jx = \cos x \\ \operatorname{sh} jx = j \operatorname{sen} x \\ \operatorname{th} jx = j \operatorname{tg} x \end{array}\right. \qquad (j = \sqrt{-1})$$

$$\left|\begin{array}{l} \operatorname{sh}(a + jb) = \operatorname{sh} a \cdot \cos b + j \operatorname{ch} a \cdot \operatorname{sen} b \\ \operatorname{ch}(a + jb) = \operatorname{ch} a \cdot \cos b + j \operatorname{sh} a \cdot \operatorname{sen} b \\ \operatorname{th}(a + jb) = \dfrac{\operatorname{th} a + j \operatorname{tg} b}{1 + j \operatorname{th} a \cdot \operatorname{tg} b}. \end{array}\right.$$

Longitud de las curvas.

1.º) Curva $y = f(x)$,

se tiene

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2}\, dx.$$

2.º) Curva paramétrica,

$$x = f(\theta) \qquad y = \varphi(\theta),$$

se tiene

$$l = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{dx^2 + dy^2}.$$

3.º Curva en coordenadas polares,

$$x = \rho \cdot \cos\theta \qquad y = \rho \cdot \operatorname{sen}\theta,$$

se tiene

$$l = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{\rho^2 + \rho'^2}\, d\theta.$$

Algunas longitudes de curvas.

La catenaria:

$$y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)$$

$$l \simeq \mathrm{L} + \frac{\mathrm{L}^3}{24a^2}$$

donde L es la distancia (paralela al eje de las x) entre los dos puntos extremos de la catenaria.

Tenemos también:

$$l = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}\right)$$

La cicloide: $l = 8\mathrm{R}$.

La cardioide: $l = 8a$.

Volúmenes de revolución.

$$\mathrm{V} = \int_a^b \pi y^2\, dx.$$

Volumen del cono: $\frac{1}{3}\pi \mathrm{R}^2 h$.

Volumen de la esfera: $\frac{4}{3}\pi \mathrm{R}^3$.

Volumen del elipsoide: $\frac{4}{3}\pi a b^2$.

Volumen engendrado por la cicloide: $5\pi^2 \mathrm{R}^3$.

Volumen del toro: $\pi \mathrm{R}^2 \cdot 2\pi a$ (R = radio del círculo generador).

Superficie lateral de los volúmenes de revolución.

$$S = \int_{x_1}^{x_2} 2\pi y \cdot dl = \int_{x_1}^{x_2} 2\pi y \sqrt{1 + y'^2} \cdot dx.$$

Algunas superficies laterales:

Cono:

$$S = \pi R l \qquad (l = \text{arista del cono})$$

Esfera:

$$S = 4\pi R^2$$

Paraboloide:

$$S = \frac{8\pi}{3}[(1 + h)^{3/2} - 1]$$

Cicloide:

$$S = \frac{64\pi R^2}{3}$$

Toro:

$$S = 4\pi^2 R a.$$

Centros de gravedad.

1.º) *Centro de gravedad de una línea*:

abscisa

$$X = \frac{\int x \cdot dl}{l}$$

ordenada

$$Y = \frac{\int y \cdot dl}{l}.$$

2.º *Centro de gravedad de una superficie:*

abscisa

$$X = \frac{\int_0^a xy\, dx}{\int_0^a y\, dx}$$

ordenada

$$Y = \frac{\int_0^a \frac{1}{2} y^2 \, dx}{\int_0^a y \, dx}.$$

3.º) *Centro de gravedad de un volumen de revolución* (alrededor del eje Oy):

ordenada

$$Y = \frac{\int_0^b \pi x^2 y \, dy}{\int_0^b \pi x^2 \, dy}.$$

EJERCICIOS Y PROBLEMAS A RESOLVER

Nota importante para el lector

Una integral se puede a menudo resolver por diferentes métodos, sea por métodos clásicos, sea por procedimientos ingeniosos. Por otra parte, una integral exige algunas veces el empleo de varios procedimientos sucesivos para ser calculada. Hay una cierta interrelación entre los procedimientos de integración, por ejemplo una integración por sustitución exigirá una sustitución trigonométrica, y una integral trigonométrica podrá exigir una sustitución no trigonométrica. Asimismo, una integral con radicales podrá resolverse, sea por una sustitución, sea por el empleo de las líneas hiperbólicas, sea por otro procedimiento.

Por ello, aunque las integrales que siguen estén clasificadas, dentro de lo posible, por categorías, a menudo se utilizará un procedimiento de otra categoría.

El alumno deberá, pues, antes de comenzar sus ejercicios, conocer bien *todos los procedimientos de integración indicados en este curso, y estar en condiciones de utilizar tal o tal procedimiento.*

Algunas veces indicamos la forma de comenzar el cálculo, pero las más de las veces debe pensarlo el alumno. Al principio, el alumno podrá encontrar dificultades para hallar el procedimiento a emplear, pero, al cabo de algún tiempo de práctica y ejercicios, encontrará por sí mismo el modo de resolver una integral, ocurriéndosele automáticamente procedimientos ingeniosos que le facilitarán el cálculo: ¡es una cuestión de trabajo y perseverancia!

Hemos dado el resultado de un cierto número de integrales, a fin de ayudar al lector en sus cálculos y darle confianza en sí mismo.

CAPITULO II

Integración por sustitución

Calcular:

2-1. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1+x}}$

2-2. $\int \frac{dx}{(2+x)\sqrt{1+x}}$

2-3. $\int \frac{dx}{\sqrt{x-1}}$

2-4. $\int \frac{dx}{(1-x)\sqrt{x}}$

2-5. $\int \frac{dx}{x+\sqrt{x-1}}$

2-6. $\int \frac{\sqrt{x}\,dx}{x-1}$

2-7. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{1+x}}$

2-8. $\int \frac{x^2\,dx}{(1+x^2)^{3/2}}$

2-9. $\int \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}}$

2-10. $\int \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}$

2-11. $\int x^2\sqrt{2x^3+9}dx$

2-12. $\int \frac{3x\,dx}{5-4x^2}$

2-13. $\int x\sqrt{3x+5}dx$

(se hará $\sqrt{3x+5}=u$)

2-14. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{a^2+x^2}}$

$\left(\text{se hará } x=\frac{1}{u}\right)$

2-15. $\int \frac{8x^2dx}{(x^3+2)^3}$

2-16. $\int \frac{x^2dx}{\sqrt[4]{x^3+2}}$

2-17. $\int \frac{(x+3)dx}{(x^2+6x)^{1/3}}$

2-18. $\int \sqrt{x^2-2x^4}\,dx$

2-19. $\int e^{3\cos 2x}\cdot \operatorname{sen} 2x\,dx$

2-20. $\int \frac{x+2}{x+1}dx$

2-21. $\int e^x\cdot\cos e^x\,dx$

2-22. $\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{1-x^6}}$

2-23. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^4-1}}$

2-24. $\int \frac{(2x-7)dx}{x^2+9}$

2-25. $\int \frac{(x+1)dx}{x^2-4x+8}$

2-26. $\int \frac{dx}{2x^2+2x+5}$

2-27. $\int \frac{(2x-3)dx}{9x^2-12x+8}$

2-28. $\int \frac{(x+2)dx}{\sqrt{4x-x^2}}$

2-29. $\int \frac{dx}{x^{1/2}-x^{1/4}}$ (hacer $x = u^4$)

2-30. $\int \frac{x\,dx}{(-x^2-4x+5)^{3/2}}$

2-31. $\int \frac{dx}{x\sqrt{3x^2+2x-1}}$

$\left(\text{hacer } x = \frac{1}{u}\right)$

2-32. $\int x^5 \sqrt{1-x^3}\,dx$

(hacer $1-x^3 = u^2$)

2-33. $\int \frac{\sqrt{x-x^2}}{x^4}\,dx$

$\left(\text{hacer } x = \frac{1}{u}\right)$

2-34. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{1-x^2}}$

(multiplicar arriba y abajo por x^{-3})

2-35. $\int \frac{dx}{x\sqrt{4x^2-4x-1}}$

(multiplicar arriba y abajo por x^2 o también hacer $x = \frac{1}{u}$)

2-36. $\int \frac{2x-3}{x^2+2ax+3a^2}\,dx$

(sumar y restar $2a$ al numerador)

2-37. $\int \frac{x\,dx}{a^2b^2+x^4}$

2-38. $\int \frac{dx}{1+\cos^2 x}$

(dividir arriba y abajo por $\cos^2 x$)

2-39. $\int \frac{dx}{a \operatorname{sen} x + b \cos x}$

(hacer $a = K\cos\alpha$, $b = K \operatorname{sen}\alpha$)

2-40. $\int \frac{x^2\,dx}{(1+2x)^{1/3}}$

(hacer $1+2x = u^3$)

2-41. $\int (1+2x^3)^{1/2}x^5 dx$

(hacer $1+2x^3 = u^2$)

2-42. $\int \frac{x^4+3x^2-5}{(x-3)^3}\,dx$

(hacer $x-3 = u$)

2-43. $\int \frac{dx}{x+\sqrt[3]{x}}$

(hacer $x = u^3$)

2-44. $\int 2\sqrt[3]{1+x^2}\,x\,dx$

2-45. $\int \frac{5a\,dx}{(b-x)^6}$

2-46. $\int \cos(\operatorname{Log} x)\frac{dx}{x}$

2-47. $\int \frac{dx}{x\sqrt{1-\operatorname{Log}^2 x}}$

2-48. $\int \operatorname{sen} 2\theta \cdot \cos^3 2\theta\,d\theta$

2-49. $\int \frac{(\text{Log } x)^3}{x} \cdot dx$

2-50. $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x}}$ (hacer $1-x=u^2$)

2-51. $\int \frac{dx}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}$

(hacer $x = \text{sen } u$)

2-52. $\int \frac{x^5\,dx}{(x^2+1)^3}$ (hacer $x^2+1=u$)

2-53. $\int \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x}}\,dx$

2-54. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}\,(2+\sqrt{x})}$

2-55. $\int \frac{dx}{x(1+\text{Log } x)}$

2-56. $\int \frac{\sqrt{x}\,dx}{1+x^{3/2}}$

2-57. $\int \frac{\cos 3x\,dx}{2+\text{sen}^2 x}$

2-58. $\int x^3(4+x^2)^{1/2}\,dx$

(hacer $4+x^2=u^2$)

2-59. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^{10}+x^5+1}}$

$\left(\text{hacer } x^5 = u, \text{ después } u = \frac{1}{z}\right)$

2-60. $\int \frac{dx}{(x+\sqrt{1+x^2})^2}$

2-61. $\int \sqrt{1+2x^2}\,dx$

(hacer $x\sqrt{2} = \text{sh } \varphi$)

2-62. $\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{x^2+a^2}}$

2-63. $\int \frac{dx}{(1-x)\sqrt{1-x^2}}$

2-64. $\int \frac{\sqrt{9-4x^2}}{x}\,dx$

2-65. $\int \frac{(16-9x^2)^{3/2}}{x^6}\,dx$

$\left(\text{hacer } x = \frac{4}{3}\,\text{sen } u\right)$

2-66. $\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{2x-x^2}}$

(hacer $x-1 = \text{sen } u$)

2-67. $\int x^4\sqrt{1-x^2}\,dx$

(hacer $x = \text{sen } \varphi$)

2-68. $\int \text{sh}^3 x\,dx.$

CAPITULO V

Integración por partes (*o por reducción*)

Calcular:

5-1. $\int x \operatorname{sen} x \cos x \, dx$

5-2. $\int x \cdot \operatorname{arc\,tg} x \, dx$

5-3. $\int \dfrac{x + \operatorname{sen} x}{1 + \cos x} \, dx$

5-4. $\int \operatorname{ch} x \cdot \cos x \, dx$

5-5. $\int \operatorname{sh} x \cdot \operatorname{sen} x \, dx$

(reemplazando ch x o sh x por sus valores, o bien desarrollar en serie de Mac-Laurin.)

5-6. $\int e^x \operatorname{sen} x \cos x \, dx$

5-7. $\int x^n \cdot \operatorname{Log} x \, dx$

5-8. $\int x^n \cdot e^{ax} \, dx$

5-9. $\int x^4 \cdot e^{3x} \, dx$

5-10. $\int x^4 (\operatorname{Log} x)^2 \, dx$

5-11. $\int x^n \operatorname{sen} ax \, dx$

5-12. $\int x^5 \operatorname{sen} 2x \, dx$

5-13. $\int e^{2x} \operatorname{sen}^5 x \, dx$

5-14. $\int e^{3x} \cdot \cos^4 x \, dx$

5-15. $\int x \sqrt{1 + x} \, dx$

5-16. $\int x \operatorname{arc\,sen} x^2 \, dx$

5-17. $\int \dfrac{e^{\operatorname{arc\,sen} x} \, dx}{\sqrt{1 - x^2}}$

(hacer $u = e^{\operatorname{arc\,sen} x}$)

5-18. $\int x^2 \cdot \operatorname{sen} x \cdot \cos x \, dx$

5-19. $\int \dfrac{\operatorname{Log}(\operatorname{Log} x)}{x} \, dx$

5-20. $\int \dfrac{x^2 \, dx}{(\cos x + x \operatorname{sen} x)^2}$

5-21. $\int \cos x \cdot \operatorname{ch} x \, dx$

5-22. $\int \cos x \cdot \operatorname{sh} x \, dx$

5-23. $\int \operatorname{sen} x \cdot \operatorname{ch} x \, dx$

5-24. $\int \dfrac{dx}{\sqrt[3]{1 + x^3}}$

5-25. $\int \dfrac{dx}{(1 + x^3)\sqrt[3]{1 + x^3}}$.

CAPITULO VI

Expresiones con radicales y trinomios

Calcular:

6-1. $\int \frac{1+x}{\sqrt{-x^2-x+1}}\,dx$

6-2. $\int \frac{x+1}{\sqrt{x^2+x+1}}\,dx$

6-3. $\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,dx$

6-4. $\int \frac{dx}{\sqrt{x(1+x)}}$

6-5. $\int \frac{dx}{\sqrt{-x^2+2ax}}$

6-6. $\int \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}\,dx$

6-7. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{a^4-x^4}}$

6-8. $\int x\sqrt{a^2+x^2}\,dx$

6-9. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{1+x^2}}$

6-10. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+16x+36}}$

(por líneas hiperbólicas)

6-11. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{a^2-x^2}}$

6-12. $\int \frac{x^3dx}{\sqrt{a^2+x^2}}$

6-13. $\int \frac{dx}{\sqrt{-x^2-12x+8}}$

6-14. $\int \frac{(8x-9)dx}{\sqrt{-x^2-7x+15}}$

6-15. $\int \sqrt{-x^2+18x+32}\,dx$

6-16. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+12x+48}}$

(por líneas hiperbólicas)

6-17. $\int \frac{4x-5}{\sqrt{x^2-18x+106}}\,dx$ (p. l. h.)

6-18. $\int \sqrt{x^2+24x+244}\,dx$ (p. l. h.)

6-19. $\int \frac{(8x-7)dx}{\sqrt{3x^2+12x-10}}\,dx$ (p. l. h)

6-20. $\int \sqrt{x^2-10x+20}dx$ (p. l. h.)

6-21. $\int \frac{2x^2-7x+10}{\sqrt{x^2-6x+6}}\,dx$ (p. l. h.)

6-22. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4x}}$

6-23. $\int \frac{(x+2)dx}{\sqrt{x^2+9}}$

6-24. $\int \sqrt{25-x^2}\,dx$

6-25. $\int \sqrt{3-4x^2}\,dx$

6-26. $\int \sqrt{3x^2+5}dx$

6-27. $\int \sqrt{4x^2-4x+5}dx$

6-28. $\int \frac{dx}{(a+bx)\sqrt{a-bx}}$

(hacer $a - bx + u^2$)

6-29. $\int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{1+x-x^2}}$

(hacer $\sqrt{1+x-x^2} = xz - 1$)

6-30. $\int \sqrt{-x^2+x+1}\,dx$

6-31. $\int \sqrt{x^2-x-1}\,dx$

6-32. $\int \sqrt{-9x^2+3x+4}$

6-33. $\int \frac{dx}{(2x+1)\sqrt{5x^2+8x+3}}$

$\left(\text{hacer } 2x+1 = \frac{1}{u}\right)$

6-34. $\int \frac{dx}{1+x\sqrt{1+x^2}}$

(hacer $\sqrt{1+x^2} = x + u$)

6-35. $\int \frac{dx}{\sqrt{-x^2+x+2}}$

6-36. $\int \frac{(2x+3)dx}{\sqrt{1+4x^2}}$

6-37. $\int \frac{(1-x)dx}{\sqrt{1-x^2}}$

6-38. $\int \frac{dx}{x^4\sqrt{x^2+1}}$

(hacer $x = \operatorname{sh} u$)

6-39. $\int \frac{\sqrt{x^2-1}}{x^4}\,dx$

$\left(\text{hacer } x = \frac{1}{\cos u}\right)$

6-40. $\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2+2x-3}}$

$\left(\text{hacer } x-1 = \frac{1}{u}\right)$

6-41. $\int \sqrt{2+\operatorname{tg}^2 x}\,dx$

(hacer $x = \sqrt{2}\operatorname{sh}\varphi$)

Nota: Más adelante, después de las integrales trigonométricas, se da un gran número de integrales definidas.

CAPITULO VII

Fracciones racionales

Calcular:

7-1. $\int \frac{x^3 dx}{2x - 1}$

7-2. $\int \frac{dx}{1 - 4x + 4x^2}$

7-3. $\int \frac{dx}{-x^2 - x + 2}$

7-4. $\int \frac{x^3 dx}{1 + x^4}$

7-5. $\int \frac{dx}{2x^2 + 3x + 1}$

7-6. $\int \frac{(x + 1)dx}{(x - 1)^2}$

7-7. $\int \frac{dx}{x(1 + x^2)}$

7-8. $\int \frac{x dx}{x^4 - 1}$

7-9. $\int \frac{x dx}{1 + x^4}$

7-10. $\int \frac{(x^2 - 1)dx}{(x - 2)(x - 3)}$

7-11. $\int \frac{x^2 + x + 1}{x^2 - x - 1} dx$

7-12. $\int \frac{1 - x^{2m}}{1 - x^2} dx$

7-13. $\int \frac{2x + 1}{(x + 2)(x - 3)^2} dx$

7-14. $\int \frac{x^3 dx}{(x^2 + 1)^2}$

7-15. $\int \frac{dx}{x^4 + x^2 + 1}$

7-16. $\int \frac{dx}{(1 + x^2)^2}$

7-17. $\int \frac{x dx}{x^4 - x^2 - 2}$

7-18. $\int \frac{x^2 dx}{(x^2 + a^2)(x^2 + b^2)}$

7-19. $\int \frac{x^2 dx}{(x^2 - 1)^2}$

7-20. $\int \frac{dx}{(x^2 - 1)^3}$

7-21. $\int \frac{x dx}{1 + x^3}$

7-22. $\int \frac{x^2 dx}{x^4 + x^2 - 2}$

7-23. $\int \frac{dx}{x^4(1 + x^2)}$

7-24. $\int \frac{x^3 dx}{(1 + x^2)^3}$

7-25. $\int \frac{dx}{1 + x^4}$

7-26. $\int \frac{x^2 dx}{1 + x^4}$

7-27. $\int \frac{(1+x)dx}{x(1+x^2)}$

7-28. $\int \frac{(2x+3)dx}{)x^2+6x+4}$

7-29. $\int \frac{(x+8)dx}{(5x-3)(4-3x)}$

7-30. $\int \frac{)x^2-8x+2}{(2x-3)^2}dx$

7-31. $\int \frac{x^2+4}{(x^2-4)(x+2)}dx$

7-32. $\int \frac{x^5dx}{(x^2-1)(x+1)}$

7-33. $\int \frac{dx}{x^2+10x+13}$

7-34. $\int \frac{dx}{x^2+12x+15}$

7-35. $\int \frac{dx}{-x^3-12x+8}$

7-36. $\int \frac{dx}{x^2+14x+60}$

7-37. $\int \frac{7x+3}{x^2+12x+52}$

7-38. $\int \frac{2x^3-1}{2x^2-6x+11}dx$

7-39. $\int \frac{x^4dx}{x^3-8}$

7-40. $\int \frac{(8x^3+3)dx}{(x^2+x+1)(x-2)}$

7-41. $\int \frac{x^4-x^3-3x^2-2x+2}{x^3+x^2-2x}dx$

7-42. $\int \frac{x^2+2}{x^3-1}dx$

7-43. $\int \frac{x^2+x+2}{(x^2+2x+3)^2}dx$

7-44. $\int \frac{(x^2+1)^2}{(x-1)^6}dx$

7-45. $\int \frac{x(2x^2-x+5)dx}{(x^2+1)^2}$

7-46. $\int \frac{\sqrt{x}\,dx}{(1+x)^2}$ (hacer $x=u^2$)

7-47. $\int \frac{2x^3+x+3}{(1+x^2)^2}dx$

7-48. $\int \frac{(x^2+3x)dx}{(x^2+1)(x+1)^2}$.

Fracciones racionales a verificar
(o expresiones que se hacen racionales)

Verificar:

7-49. $\int \frac{dx}{x^4-1} = \frac{1}{4}\operatorname{Log}\frac{x-1}{x+1} - \frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}\,x$

7-50. $\int \frac{2+3x}{(4-x)^3}dx = \frac{7}{(4-x)^2} - \frac{3}{4-x}$

7-51. $\int \frac{2x^2-x+2}{2x-3}dx = \frac{x^2}{2} + x - \frac{5}{2}(\operatorname{Log}(2x-3)$

7-52. $\displaystyle\int \frac{(2x^4+1)dx}{x^3(x^2+x+1)} = -\frac{1}{2x^2} + \frac{1}{x} + \operatorname{Log}(x^2+x+1)$

7-53. $\displaystyle\int \frac{x+2}{x^4-1}\,dx = \frac{1}{4}\operatorname{Log}\frac{(x-1)^3}{(x+1)(x^2+1)} - \operatorname{arc\,tg} x$

7-54. $\displaystyle\int \frac{x^5+2}{x^3-1}\,dx = \frac{x^3}{3} + \operatorname{Log}(x-1) - \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)$

7-55. $\displaystyle\int \frac{(x-1)}{\sqrt{2x+1}}\,dx = \frac{\sqrt{2x+1}(x-4)}{3}$ (hacer $2x+1=u^2$)

7-56. $\displaystyle\int \frac{dx}{1(+x^2)^{3/2}} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ (hacer $\sqrt{1+x^2} = u + x$)

7-57. $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{(1+x^2)\sqrt{1-x^4}} = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1-x^2}{1+x^2}}$ (hacer $x^2 = u$)

7-58. $\displaystyle\int \frac{(20x+17)dx}{(2x+1)^2(3x+5)} = \operatorname{Log}(2x+1) - \frac{1}{2x+1} - \operatorname{Log}(3x+5)$

7-59. $\displaystyle\int \frac{(9x+5)dx}{x(x+1)(x^2+2x+5)}$

$= \operatorname{Log} x + \operatorname{Log}(x+1) - \frac{1}{2}\operatorname{Log}(x^2+2x+5) - \frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{x+1}{2}\right)$

7-60. $\displaystyle\int \frac{(3-x)dx}{x^2+x^3} = -\frac{3}{x} + 4\operatorname{Log}\frac{x+1}{x}$

7-61. $\displaystyle\int \frac{x^3+x+1}{x^2-x+1}\,dx = x + \operatorname{Log}(x^3-x+1) + \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)$

7-62. $\displaystyle\int \frac{(2x^3-2x^2-2x+1)dx}{x^4-2x^3+x^2} = \operatorname{Log}(x-1)^2 + \frac{1}{x^2-x}$

7-63. $\displaystyle\int_2^3 \frac{(x^2+1)dx}{x-1} = \frac{7}{2} + \operatorname{Log} 4$

7-64. $\displaystyle\int \frac{3x^2dx}{x^4+5x^2+4} = 2\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{2} - \operatorname{arc\,tg} x.$

CAPITULO VIII

Integrales trigonométricas

Calcular:

8-1. $\int tg^m x\,dx$

(poner $\operatorname{tg} x = z$ y hacer la división)

8-2. $\int \operatorname{tg}^6 x\,dx$

8-3. $\int \operatorname{tg}^7 x\,dx$

8-4. $\int \operatorname{sen}^7 \theta\,d\theta$ (hacer $x = \cos\theta$)

8-5. $\int \operatorname{sen}^6 \theta\,d\theta$

(hacer $x = \cos\theta + j \operatorname{sen}\theta$)

8-6. $\int \cos^5 \theta\,d\theta$ (hacer $x = \operatorname{sen}\theta$)

8-7. $\int \dfrac{\operatorname{sen} x\,dx}{a + b\cos x}$

8-8. $\int \dfrac{dx}{1 + \operatorname{tg} x}$

8-9. $\int \dfrac{dx}{1 + \cos^2 x}$

8-10. $\int \operatorname{sen}^3 \theta \cdot \cos^3 \theta\,d\theta$

8-11. $\int \operatorname{sen}^4 \theta \cdot \cos^3 \theta\,d\theta$

8-12. $\int \operatorname{sen}^3 \theta \cdot \cos^4 \theta\,d\theta$

8-13. $\int \operatorname{sen}^2 \theta \cdot \cos^4 \theta\,d\theta$

8-14. $\int x^3 \sqrt{5 + x^2}\,dx$

8-15. $\int \operatorname{sen}^3 3x \cdot \cos^5 3x\,dx$

8-16. $\int \sqrt{1 - \cos x}\,dx$

8-17. $\int (1 + \cos 3x)^{3/2}\,dx$

8-18. $\int \dfrac{\operatorname{tg} x\,dx}{1 + \cos x}$

(hacer $\cos x = u$)

8-19. $\int \dfrac{dx}{\cos x - \cos\theta}$

$\left(\text{hacer } \operatorname{tg}\dfrac{x}{2} = t \text{ y } \operatorname{tg}\dfrac{\theta}{2} = \alpha\right)$

8-20. $\int \dfrac{\cos x\,dx}{1 + \cos x}$

8-21. $\int \dfrac{dx}{\operatorname{sen}^4 x \cos^2 x}$

8-22. $\int \dfrac{dx}{1 + \cos^2 x}$

8-23. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{\cos x}\,(1 - \cos x)}$

(hacer $\operatorname{tg}\dfrac{x}{2} = t$, y después $1 - t^2 = u$)

8-24. $\displaystyle\int \frac{\cos^3 x\,dx}{1-2\,\operatorname{sen} x}$ (hacer $u = \operatorname{sen} x$)

8-25. $\displaystyle\int \frac{dx}{1+\cos x+\cos 2x}$ (hacer $u = \cos x$)

8-26. $\displaystyle\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^4 x+\cos^4 x}$ (hacer $\operatorname{tg} 2x = u$)

8-27. $\displaystyle\int \frac{\cos 2x\,dx}{\cos^2 x}$

8-28. $\displaystyle\int \cos 3x \cdot \cos^3 x\,dx.$

Integrales trigonométricas a verificar

Calcular:

8-29. $\displaystyle\int \frac{dx}{\operatorname{tg}^3 x} = -\frac{1}{2\operatorname{sen}^2 x} - \operatorname{Log}\operatorname{sen} x$

8-30. $\displaystyle\int \frac{dx}{a^2\cos^2 x + b^2\operatorname{sen}^2 x} = \frac{1}{ab}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{b}{a}\operatorname{tg} x\right)$

8-31. $\displaystyle\int \frac{\cos^4 x\,dx}{\operatorname{sen} x} = \frac{1}{3}\cos^3 x + \cos x + \operatorname{Log}\operatorname{tg}\frac{x}{2}$

8-32. $\displaystyle\int \frac{\cos^3 x\,dx}{\operatorname{sen}^2 x} = -\frac{1+\operatorname{sen}^2 x}{\operatorname{sen} x}$

8-33. $\displaystyle\int \cos x^4 \operatorname{sen}^3 x\,dx = \frac{\cos^7 x}{7} - \frac{\cos^5 x}{5}$

8-34. $\displaystyle\int \operatorname{ch}^3 x\,dx = \frac{1}{4}\left(\frac{\operatorname{sh} 3x}{4} + 3\operatorname{sh} x\right)$

8-35. $\displaystyle\int \operatorname{sh}^4 x\,dx = \frac{1}{8}\left(\frac{\operatorname{sh} 4x}{4} - 2\operatorname{sh} 2x + 3x\right)$

8-36. $\displaystyle\int_{-\pi}^{+\pi} \frac{dx}{1-\cos a\cdot\operatorname{sen} x} = \frac{2\pi}{\operatorname{sen} a} \qquad \left(0 < a < \frac{\pi}{2}\right)$

8-37. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{a^2\cos^2 x + b^2\operatorname{sen}^2 x} = \frac{\pi}{2ab}$

8-38. $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{dx}{(1+2x^2)\sqrt{1+x^2}} = \frac{\pi}{6}$

8-39. $\displaystyle\int \frac{\cos x\,dx}{5-3\cos x} = -\frac{x}{3} + \frac{5}{6}\operatorname{arc\,tg}\left(2\ \operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)$

8-40. $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{dx}{(2+\cos x)^2} = \frac{2\pi\sqrt{3}}{9}.$

CAPITULO IX

Integración por desarrollo en serie

Calcular:

9-1. $\int \sqrt{x} e^x dx$

9-2. $\int \sqrt{\cos x}\, dx$

9-3. $\int \sqrt[3]{1 + x^2} dx$

9-4. $\int_0^1 \operatorname{sen} \frac{\pi x^2}{2}\, dx.$

Integrales especiales

Calcular:

9-5. $\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{9 - x^2}}$

9-6. $\int_0^2 \frac{dx}{2 - x}$

9-7. $\int_0^4 \frac{dx}{(x - 1)^2}$

9-8. $\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt[3]{x - 1}}$

9-9. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{e^x + e^{-x}}$

9-10. $\int_0^\infty e^{-x} \operatorname{sen} x\, dx$

9-11. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x\, dx}{\sqrt{1 - \operatorname{sen} x}}$

9-12. $\int_0^4 (x^3 - 6x^2 + 8x) dx$

9-13. $\int_0^\infty x^n e^{ax} dx$

($a > 0$, n entero y > 0)

9-14. $\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{x^n}.$

Integrales definidas

Calcular:

9-15. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$

9-16. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{3 - 2x}}$

9-17. $\int_0^1 \frac{dx}{a^2 + b^2 x^2}$

9-18. $\int_0^1 \frac{x\, dx}{\sqrt{1 - x^2}}$

9-19. $\int_0^1 \frac{x\, dx}{\sqrt{1 + x^2}}$

9-20. $\int_0^\infty \frac{dx}{x(1 + x)}$

9-21. $\int_0^{\infty} \frac{dx}{x(1+x^3)}$

9-22. $\int_0^{1} \frac{dx}{x^2-x+1}$

9-23. $\int_0^{\infty} \frac{x\,dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}$

9-24. $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2(1+x)}$

9-25. $\int_0^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^2}$

9-26. $\int_{-1}^{+1} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,dx$

9-27. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2\theta\, d\theta$

9-28. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{sen}\theta\, d\theta}{1+\cos^2\theta}$

9-29. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg}^4\theta\, d\theta$

9-30. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{1+\operatorname{sen}\theta}$

9-31. $\int_0^{1} x \operatorname{Log} x\, dx$

9-32. $\int_0^{1} \operatorname{arc\,sen} x\, dx$

9-33. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \theta \cdot \operatorname{sen}\theta\, d\theta$

9-34. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{\operatorname{ch} x}$

9-35. $\int_0^{\infty} \frac{dx}{(1+x)^2}$

9-36. $\int_0^{2} \frac{dx}{(x-1)^2}$

9-37. $\int_1^{10} \frac{dx}{\sqrt[3]{x-2}}$

9-38. $\int_0^{1} \frac{1-x^m}{1-x}\,dx$

9-39. $\int_0 \frac{x^3 dx}{x+1}$

9-40. $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{+\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg}\theta \cdot d\theta$

9-41. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+2x+2}$

9-42. $\int_0^{a} x^2 \sqrt{a^2-x^2}dx$

9-43. $\int_0^{\infty} \frac{dx}{a^2+b^2x^2}$

9-44. $\int_0^{3} \frac{2x dx}{(1+x^2)(3+x^2)}$

9-45. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4\theta \cdot d\theta$

9-46. $\int_a^{b} \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}$

9-47. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{tg}^2\theta\, d\theta$

9-48. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \theta^2 \cos\theta\, d\theta$

9-49. $\int_4^9 \frac{dx}{1-\sqrt{x}}$

9-50. $\int_0^1 \frac{1-x^2}{1+x^2}\,dx$

9-51. $\int_0^1 x^3(1-x)^3 dx$

9-52. $\int_0^1 \frac{x^5 dx}{\sqrt{1-x^3}}$

9-53. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{Long}\,(\operatorname{sen} x)dx$

9-54. $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{2+\operatorname{sen} x}$

9-55. $\int_0^{16} \frac{x^{1/4}dx}{1+x^{1/2}}$ (hacer $u^4 = x$)

9-56. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5\theta\, d\theta$

9-57. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^6\theta\, d\theta$

9-58. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^5\theta \cos^3\theta\, d\theta$

9-59. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^2\theta \cdot \cos^3\theta\, d\theta$

9-60. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \theta \cdot \operatorname{sen}^2\theta\, d\theta$

9-61. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{sen} 4\theta}{\operatorname{sen}\theta}\,d\theta$

9-62. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{sen} 3\theta}{\operatorname{sen}\theta}\,d\theta$

9-63. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2(1-x)}}$
(hacer $\sqrt[3]{x^2(1-x)} = ux$)

9-64. $\int_0 \frac{x^2 \operatorname{arc\,tg} x dx}{1+x^2}$ (por partes)

9-65. $\int_0^1 \frac{dx}{2+\sqrt{1-x^2}}$
(hacer $x = \operatorname{sen}\varphi$, después $z = \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}$)

9-66. $\int_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}dx$

9-67. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 x \cdot \operatorname{sen}^2 x\, dx$

9-68. $\int_0^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^4}$ (hacer $x = \operatorname{tg} u$)

9-69. $\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{(x-1)(2-x)}}$
[hacer $x-1 = (2-x)u^2$]

9-70. $\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{x+\sqrt{x^2+1}}$

9-71. $\int_0^1 \frac{dx}{(4-x^2)\sqrt{1-x^2}}$

9-72. $\int_{-\pi}^{+\pi} \frac{dx}{\operatorname{sen} x + \cos x + 2}$

9-73. $\int_0^{\pi} \operatorname{sen} 6x \cdot \cos^4 x dx$

9-74. $\int_0^{\infty} \frac{dx}{\operatorname{ch}^4 x + \operatorname{sh}^4 x}$
(hacer $e^{4x} = u$)

9-75. $\int_{-3}^{-1} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3}\right) dx$

9-76. $\int_{1}^{8} (1 + \sqrt[3]{x})\, dx$

9-77. $\int_{0}^{\frac{2\pi}{3}} \frac{d\theta}{5 + 4\cos\theta}$

9-78. $\int_{0}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{1 - \operatorname{sen} x}$

9-79. $\int_{0}^{\sqrt{2}} \frac{dx}{(1 + 2x^2)\sqrt{1 + x^2}}$

9-80. $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{3\operatorname{tg} x + 2}$

9-81. $\int_{0}^{\infty} \frac{dx}{(1 + x^2)(4 + x^2)}$

9-82. $\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{(2 + x)\sqrt{1 - x^2}}$

9-83. $\int_{0}^{1} \sqrt{\frac{x}{1 - x}}\, dx$

9-84. $\int_{0}^{2\pi} \frac{\operatorname{sen}^2 x\, dx}{\sqrt{2} - \cos x}$

9-85. $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg}^2 x \cdot \operatorname{sen}^5 x\, dx$

9-86. $\int_{-\pi}^{+\pi} \cos 3x \cdot \cos^3 x\, dx$

9-87. $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\operatorname{sen}^3 x}{\cos x}\, dx$

9-88. $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{dx}{1 - \cos x}$

9-89. $\int_{0}^{2\pi} \frac{dx}{5 + 3\cos x}$

9-90. $\int_{\frac{1}{3}}^{1} \frac{(x - x^3)^{1/3}}{x^4}\, dx \left(\text{hacer } x = \frac{1}{u}\right)$

9-91. $\int_{0}^{\operatorname{Log} 2} \sqrt{e^x - 1}\, dx$

(hacer $e^x - 1 = u$)

9-92. $\int_{0}^{1} \operatorname{Log} x\, dx$

9-93. $\int_{0}^{\infty} \frac{1 - x}{1 - x^3}\, dx$

9-94. $\int_{0}^{\pi} \frac{\operatorname{sen}\theta \cdot d\theta}{(2 + \cos\theta)^2}$.

Verificar las integrales siguientes:

9-95. $\int_{3}^{8} \frac{dx}{\sqrt{1 + x}} = 2$

9-96. $\int_{-5}^{2} \frac{6dx}{\sqrt[3]{2 - 5x}} = 9$

9-97. $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{+\frac{\pi}{4}} \frac{7\cos 2x dx}{\sqrt{9 - 5\operatorname{sen} 2x}} = \frac{7}{5}$

9-98. $\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}} \frac{dx}{9+x^2} = \frac{\pi}{18}$

9-99. $\displaystyle\int_3^6 \frac{dx}{x^2-6x+18} = \frac{\pi}{4}$

9-100. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{sen}^3 2x\,dx = 1/3$

9-101. $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{8a^3dx}{4a^2+x^2} = 2\pi a^2$

9-102. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{(\cos x+2)^2} = \frac{2\pi\sqrt{3}}{27} - \frac{1}{6}$

$\left(\text{hacer } t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)$

9-103. $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{\frac{1-x}{x}}\,dx = \frac{\pi}{2}$

(hacer $\operatorname{sen}^2 u = x$)

9-104. $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{dx}{5+4\cos x} = 1{,}047$

9-105. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg}^4 x\,dx = 0{,}118$

9-106. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \operatorname{sen} x\,dx = 1{,}14$

9-107. $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{2\sqrt{1-x^2}+(1-x^2)} = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$

$\left(\text{hacer } x = \operatorname{sen}\varphi, \text{ después } z = \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\right)$

9-108. $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{dx}{1+\cos^2 x} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$

9-109. $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-x}\cdot \operatorname{sen} x\,dx = \frac{1}{2}$

9-110. $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-x}\cdot \cos x\,dx = \frac{3}{13}$

9-111. $\displaystyle\int e^{ax}(\operatorname{sen} ax + \cos ax)dx = \frac{e^{ax}\operatorname{sen} ax}{a}$

9-112. $\displaystyle\int_0^{\pi} \operatorname{sen}^6 x\,dx = \frac{5\pi}{16}$

9-113. $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2+2x+5} = 0{,}55$

9-114. $\displaystyle\int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}} = 2\operatorname{arc\,tg}\sqrt{x}$

9-115. $\displaystyle\int_0^3 x\sqrt{1+x}\,dx = \frac{116}{15}$

9-116. $\displaystyle\int_{-1}^3 \frac{dx}{(x+10)\sqrt{1+x}} = \frac{\pi}{9}$

9-117. $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+4x-4}} = \operatorname{arc\,tg}\left(2\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)$

9-118. $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{(\sqrt{x^2+3x})^3} = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{x}{x+3}}$

9-119. $\displaystyle\int_3^8 \frac{x\,dx}{\sqrt{1+x}} = 10^{2/3}$

9-120. $\displaystyle\int_0^4 \frac{x^2dx}{\sqrt{16-x^2}} = 4\pi$

9-121. $\int \sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}\,dx$

$= \operatorname{arc\,sen} x + \sqrt{1-x}.$

9-122. $\displaystyle\int_0^4 x \cdot \operatorname{Log} \sqrt{9+x^2}\,dx = 11{,}18$

(por partes)

9-123. $\displaystyle\int_3^4 \frac{dx}{x\sqrt{25-x^2}} = \frac{1}{5}\operatorname{Log}\frac{3}{2}$

9-124. $\displaystyle\int_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{\pi}{16}$

(hacer $x = \operatorname{sen} u$)

9-125. $\displaystyle\int_0^{-8} x^2 e^x \operatorname{sen} x\,dx = \frac{1}{2}$

9-126. $\displaystyle\int_1^{\sqrt{3}} \frac{x^2dx}{\sqrt{(4-x^2)^3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3} - \frac{\pi}{6}$

9-127. $\displaystyle\int_1^2 \frac{\sqrt{10x-x^2}dx}{x^3} = \frac{19}{15}$

9-128. $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{2+\sqrt{1-x^2}} = 0{,}36$

$\left(\text{hacer } x = \operatorname{sen} u,\right.$

$\left.\text{después } z = \operatorname{tg}\dfrac{u}{2}\right)$

PRIMERAS APLICACIONES DE LAS INTEGRALES

CAPITULO XI

Cálculo de las superficies

11-1. Calcular la superficie comprendida entre la curva

$$xy = 1 \quad \text{y la recta} \quad 4y + 3x = 11.$$

11-2. Superficie del bucle de la curva

$$\rho = \frac{3 \operatorname{sen} \theta \cos \theta}{\operatorname{sen}^3 \theta + \cos^3 \theta}$$

donde θ varía de 0 a $\pi/2$.

11-3. Superficie comprendida entre la curva

$$y = \frac{12x}{x^2 + 3} \qquad (\text{de } x = 0 \text{ a } x = 4)$$

y el eje de las x.

11-4. Superficie comprendida entre la curva

$$y = \frac{8}{x^2 + 4} \quad \text{y la recta} \quad 4y = x^2.$$

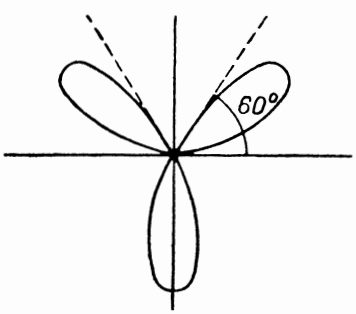
11-5. Superficie común al círculo $\rho = 3 \cos \theta$ y la cardioide

$$\rho = 1 + \cos \theta.$$

11-6. Superficie total de los tres bucles de la curva

$$\rho = a \cdot \operatorname{sen} 3\theta$$

que es una hélice de tres palas.



11-7. Superficie de la elipse dada en coordenadas polares:

$$\rho^2 = \frac{a^2b^2}{a^2 \operatorname{sen}^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta}$$

siendo el centro el polo, y el eje polar el eje mayor.

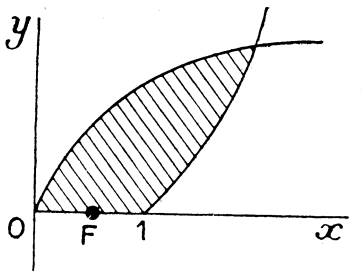
11-8. Superficie de la curva

$$\rho = a \cos \theta + b \qquad (b > a)$$

donde θ varía de 0 a 2π (caracol de Pascal).

11-9. Superficie comprendida entre la parábola $y^2 = x$ y su desarrollada

$$27y^2 - 8(x - 1)^3.$$



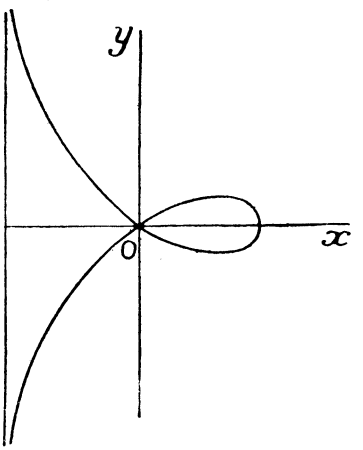
11-10. Superficie limitada por la recta $4y = 4 - x$ y la parábola $y^2 = 4 - x$.

11-11. Superficie interior del as de diamantes (o astroide):

$$x = a \cos^2 \theta \qquad y = a \operatorname{sen}^3 \theta.$$

11-12. Superficie del bucle de la curva:

$$\rho = 2 \cos \theta - \frac{1}{\cos \theta} \qquad (\theta \text{ varía de } -\pi/4 \text{ a } +\pi/4).$$



11-13. Superficie comprendida entre las dos parábolas:

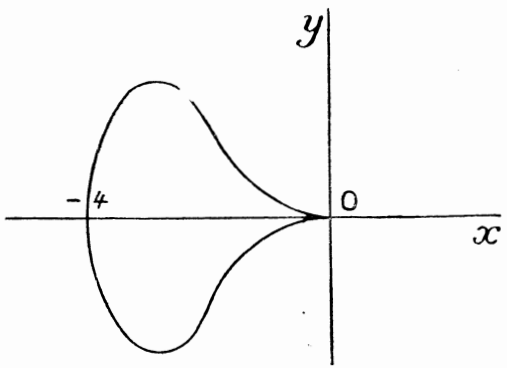
$$y = 6x - x^2 \quad \text{e} \quad y = x^2 - 2x.$$

11-14. Superficie común a los dos círculos:

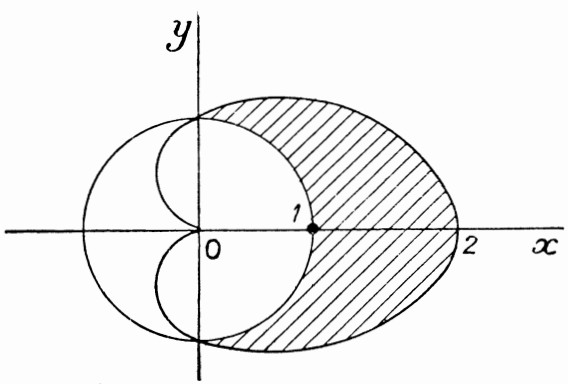
$$x^2 + y^2 = 4 \quad \text{y} \quad x^2 + y^2 = 4x.$$

11-15. Superficie de la curva

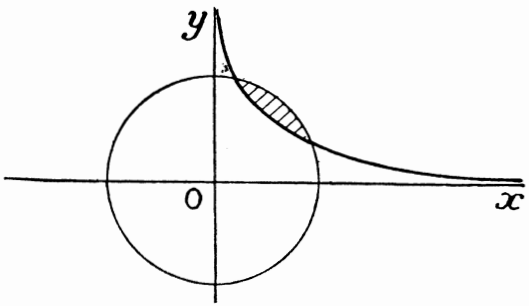
$$y^2 = x^4(4 + x).$$

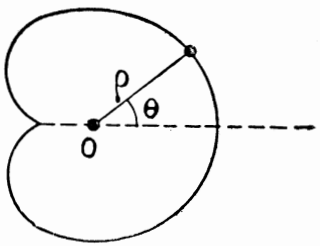


11-16. Superficie interior a la cardioide $\rho = 1 + \cos\theta$ y exterior al círculo $\rho = 1$.



11-17. Superficie comprendida entre el círculo $x^2 + y^2 = 4$ y la hipérbola $xy = 1$ (en el primer cuadrante).





11-18. Superficie de la curva $\rho = a + b\cos\theta$ $(a > b > 0)$.

CAPITULO XIII

Cálculo de las longitudes de curvas

Calcular la longitud de las curvas siguientes:

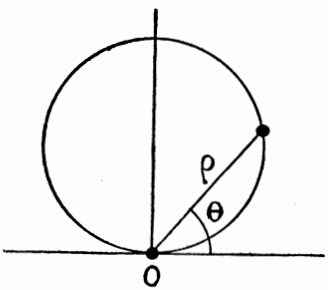
13-1. Catenaria $y = c \cdot \operatorname{ch} \frac{x}{c}$.

13-2. $y^2 = 8x^3$ (desde $x = 1$ hasta $x = 3$).

13-3. $x^2 = 4ay$ (desde $x = -l$ a $x = +l$).

13-4. Parábola $y = \frac{x^3}{2}$ (desde $x = 0$ a $x = 1$).

13-5. Círculo $\rho = 2R \operatorname{sen} \theta$.

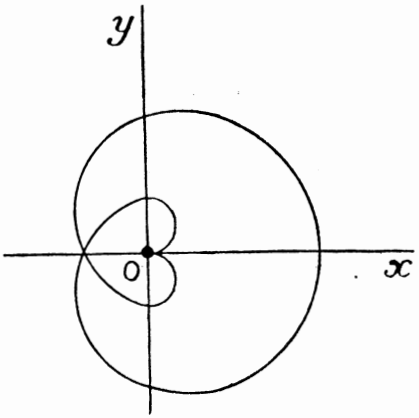


13-6. $y = x^{3/2}$ (desde $x = 0$ hasta $x = 5$).

13-7. $y = \frac{x^4}{8} + \frac{1}{4x^2}$ (desde $x = 1$ a $x = 4$).

13-8. $x = \theta^2$, $y = \theta^3$ (desde $\theta = 0$ a $\theta = 4$).

13-9. $\rho = a \cos^4 \frac{\theta}{4}$.



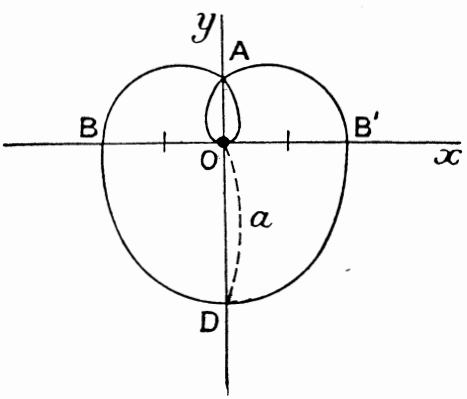
13-10. Parábola $y^2 = 4x$, desde $x = 0$ hasta $x = 1$.

13-11. $y^2 = -x^2 + 4x$, desde $x = 0$ hasta $x = 1$.

13-12. $y = \frac{x^3}{3}$, desde $x = 0$ hasta $x = 1$.

13-13. $y = \frac{2}{3}(4 - x)^{3/2}$, desde $x = 0$ hasta $x = 4$.

13-14. $\rho = a \cdot \operatorname{sen}^3 \frac{\theta}{3}$.



13-15. $y = 2\sqrt{2}\,[\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}]$ (hacer $x = \cos 2\varphi$).

13-16. $y = \dfrac{1}{x}$ (se desarrollará en serie $\sqrt{1+y'^2}$).

13-17. La astroide (o as de diamantes):

$$x = a\cos^3\theta, \qquad y = a\,\mathrm{sen}^3\,\theta.$$

13-18. $x^{2/5} + y^{2/5} = a^{2/5}$, o bien $x = a\cos^5\theta$, $y = a\,\mathrm{sen}^5\,\theta$.

CAPITULO XIV

Cálculo de los volúmenes de revolución (alrededor del eje x)

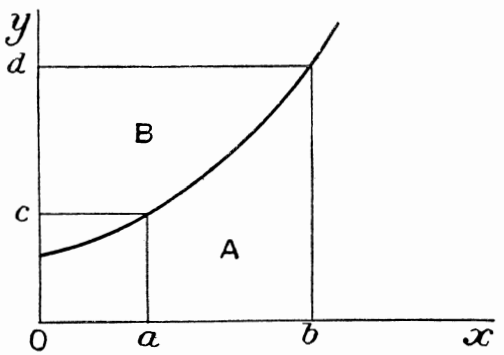
Calcular los volúmenes engendrados por las curvas siguientes:

14-1. Círculo $y^2 = x(2a - x)$. Calcular $\int_0^h$.

14-2. Parábola $y^2 = 4ax$. Calcular $\int_0^h$.

14-3. Todo engendrado por el círculo $x^2 + (y - a)^2 = b^2$, (con $a > b$). Calcular $\int_{-b}^{+b}$.

Sea la curva $y = Ax^n$. Calcular el volumen de revolución engendrado cuando:



14-4. 1.°) La superficie A gira alrededor del eje de las x.

14-5. 2.°) La superficie B gira alrededor del eje de las y.

14-6. 3.°) La superficie A gira alrededor del eje de las y.

14-7. 4.°) La superficie B gira alrededor del eje de las x.

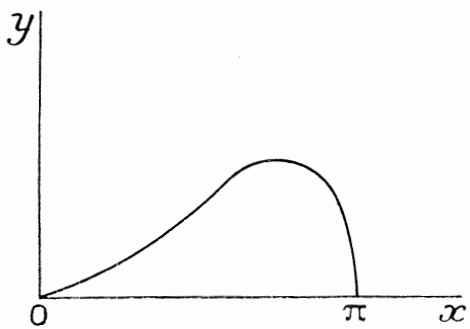
Se integrará de a a b.

14-8. a 14-11. Los mismos cálculos para la curva $y = 5x^2$, con $a = 1$ y $b = 2$.

14-12. a 14-15. Los mismos cálculos para la curva $y = e^{-x}$, con $a = 1$ y $b = 2$.

14-16. Volumen engendrado por la superficie comprendida entre la parábola $y = 4x - x^2$ y la línea $y = 6$, girando alrededor del eje de las x.

14-17. Volumen engendrado por la superficie comprendida entre el primer arco de la curva $y = e^x \operatorname{sen} x$ y el eje de las x, girando alrededor del eje de las x.



14-18. Volumen engendrado por la superficie comprendida entre las rectas $y = 0$, $x = 1$ y la curva $y = x^3$, girando alrededor del eje de las x.

Lo mismo para la superficie comprendida entre las curvas siguientes:

14-19. $x = 3$, $\quad y^2 - 2y + x - 3 = 0$.

14-20. $x + y = 1$, $\quad x^{1/2} + y^{1/2} = 1$.

14-21. $x + y = 5$, $\quad xy = 4$.

14-22. Eje de las x. $\quad y = \operatorname{sen} \dfrac{\pi x}{2}$, $\quad y = x^2$.

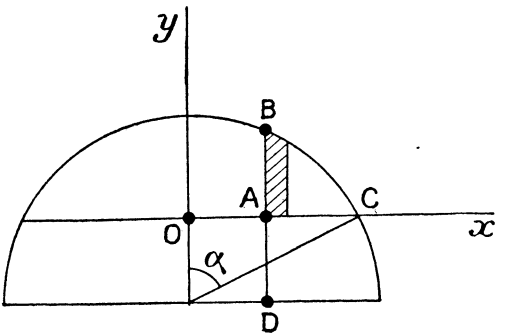
14-23. $y = x^2$, $\quad y^2 = x$.

14-24. Volumen engendrado por la revolución alrededor del eje polar de la superficie comprendida entre la cardioide $\rho = 4(1 + \cos\theta)$ y las rectas

$$\theta = 0 \quad \text{y} \quad \theta = \frac{\pi}{2}.$$

14-25. En un círculo de radio R se considera un segmento comprendido entre un arco de valor 2α y la cuerda de este arco. Calcular el volumen engendrado por este segmento girando alrededor de su cuerda.

$$R = 1, \qquad \alpha = 28^\circ\, 30'.$$



CAPITULO XV

Superficies laterales de los volúmenes de revolución

15-1. Curva $y^2 = 8x$, girando alrededor del eje de las x, desde $x = 2$ hasta $x = 4$.

15-2. Curva $y^2 = 12x$, girando alrededor del eje de las x, desde $x = 0$ hasta $x = 3$.

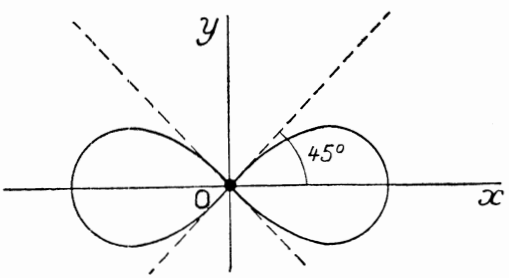
15-3. Curva $y^3 = x$, girando alrededor del eje de las y, desde $y = 0$ hasta $y = 1$.

14-4. Curva del as de diamantes, o hipocicloide.

$$x = a\cos^3\theta, \qquad y = a\,\mathrm{sen}^3\,\theta$$

girando alrededor del eje de las x.

15-5. Curva $\rho^2 = a^2\cos 2\theta$ (lemniscata) girando alrededor del eje polar Ox (θ varía de 0 a $\pi/4$).



15-6. Cicloide cuya ecuación diferencial es

$$y\,dy = \sqrt{2a - y}\,dx,$$

girando alrededor del eje de las x.

Superficies engendradas por los arcos de curva siguientes, limitados en los puntos dados, y girando alrededor del eje de las x:

15-7. $y^2 = 4x$ $\quad (0,\ 0)$ y $(3,\ 2\sqrt{3})$

15-8. $x^2 + y^2 = 4$ $\quad (1,\ \sqrt{3})$ y $(2,\ 0)$.

15-9. Superficie lateral del volumen engendrado por la rotación alrededor del eje de las x de la superficie limitada por las dos parábolas:

$$y^2 = x + 3 \quad \text{e} \quad y^2 = 4x.$$

CAPITULO XVI

Centros de gravedad

Hallar la posición del centro de gravedad en los ejemplos siguientes:

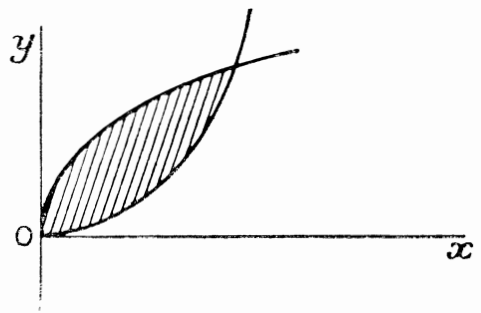
16-1. Línea formada por una cicloide:

$$x = R(\theta - \operatorname{sen}\theta) \qquad y = R(1 - \cos\theta)$$

16-2. Superficie de la curva $y = \operatorname{sen} x$, de 0 a π.

16-3. Superficie comprendida entre las dos curvas

$$y^2 = 4x \quad \text{y} \quad x^2 = 4y.$$



16-4. Superficie de la parábola $y = 4 - x^2$, en el primer cuadrante.

16-5. Superficie comprendida entre las parábolas

$$y^2 = x \quad \text{y} \quad x^2 = -8y.$$

16-6. Volumen engendrado por la parábola $y = -x^2 + 4$ (en el primer cuadrante y girando alrededor del eje de las x).

16-7. Volumen de una semiesfera.

16-8. Línea de una catenaria $y = \dfrac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)$.

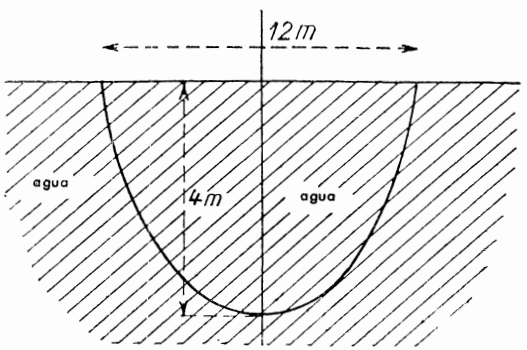
16-9. Línea formada por la cicloide:

$$x = a(\theta - \operatorname{sen}\theta), \qquad y = a(1 - \cos\theta).$$

16-10. Superficie de una cicloide entre la curva y el eje de las x. Deducir el volumen engendrado si la superficie gira alrededor del eje de las x.

PROBLEMAS DIVERSOS DE INTEGRACION

1. Hallar la densidad media de un semicírculo cuya densidad es proporcional a la distancia al diámetro.
2. Calcular la densidad media de una esfera cuya densidad es proporcional a la distancia al centro.
3. La velocidad con la que una cierta sustancia, en una solución, se descompone en cada instante, es proporcional a su valor actual en la solución. Al principio se tenía 27 g, y tres horas más tarde quedan 8 g. ¿Cuánto quedará al final de la cuarta hora?
4. Una suma de 100 pesetas se coloca al 6 % de interés compuesto *en cada instante*. ¿Cuál es su valor al cabo de 10 años? Comparar su valor al que daría un interés *anual* del 6 %.
5. Una placa de forma parabólica tiene una anchura de 12 m y una profundidad de 4 m. Calcular la presión total del agua sobre la placa al ser ésta sumergida verticalmente.



6. Un líquido fluye por un tubo cilíndrico de forma que, si v_0 es la velocidad a lo largo del eje del tubo, la velocidad a la distancia x del eje sea:

$$v = v_0 - Kx^2$$

donde K es una constante.
Calcular el gasto del tubo, de radio R, conociendo v_0. Calcular la velocidad media.

7. La resistencia opuesta por el aire sobre un coche es proporcional a la velocidad v. Si F es la fuerza constante aplicada por el motor al coche, se tiene

$$m\gamma = \Sigma \text{ fuerzas}$$

o bien

$$m\frac{dv}{dt} = F - kv.$$

Calcular la velocidad v en función del tiempo t, si $v = 0$ para $t = 0$.

Si se suprime la fuerza F, ver cómo varía v en función del tiempo t.

8. Un río fluye en un terreno describiendo una curva que tiene por ecuación $y = x - 2x^2$ (x en km), siendo el eje de las x una carretera. Calcular la superficie, en hectáreas, entre el río y la carretera.

NOTA: Al final del Tomo IV se encuentra una lista donde se incluye un gran número de problemas a resolver por integrales, simples o dobles.

Resumen del Tomo IV

1.° Cálculo de los momentos de inercia; numerosos ejemplos.

2.° 23 ejemplos de aplicación de las integrales a la mecánica, electricidad, vibraciones, radio, etc.

3.° La serie de FOURIER y sus aplicaciones. Cálculo detallado de los coeficientes. Ejemplos *prácticos detallados* de desarrollos en serie de FOURIER.

4.° Integrales curvilíneas.

Integración de las diferenciales totales. Teorema de Green.

Ejemplos detallados.

5.° Integración gráfica (Fórmula de Simpson), y ejemplos numéricos.

6.° Integrales dobles y triples. Ejemplos diversos. Algunas aplicaciones de las integrales dobles.

FE DE ERRATAS

CURSO ELEMENTAL DE MATEMATICAS SUPERIORES (Tomo III)

Página	*Dice*	*Debe decir*
283 Ejercicio 11-4	$y = \frac{8}{x^2 + 4}$ y la recta $4y = x^2$.	$y = \frac{8}{x^2 + 4}$ y la recta $4y = x$.

MELENDEZ VALDES, 14 y 65 - MADRID-15